Tentamensskrivning i Differentialgeometri 20010815, MAN500 Lösningar

1. Villkoret kan skrivas i formen $eb = 0$ (eftersom vektorn b är ortogonal till tangentplanet). Deriverar och använder den tredje Frenetekvationen: $\tau en = 0$, så $\tau = 0$ eller $en = 0$. Om $\tau = 0$, så $b' = 0$, och vektorn b är konstant, så kurvan ligger i planet som är ortogonalt till b. Om $eb = 0$, deiverar en gång till, kommer till $e(kt + \tau b) = 0$, $ket = 0$. I sista formeln, $et \neq 0$, eftersom vektorn e inte kan ha noll projektioner på alla Frenetvektorer. Så $k = 0$, vad är förbjudet i problemet.

2. (c) Vi beräknar derivatan till den första Frenet ekvationen:

$$\alpha''' = t'' = (kn)' = k'n + kn'.$$

Så

$$t'' = \frac{k'}{k}t' + k(-kt + \tau b), \tag{1}$$

från andra Frenet ekvationen. Den sista ekvationen deriverar vi en gång till:

$$\alpha^{IV} = t''' = (\frac{k'}{k})'t' + \frac{k'}{k}t'' - (k^2)'t - k^2t' + (k\tau)'b + k\tau b'.$$

Här sätter vi in $b' = \frac{k}{\tau}t'$ (från den tredje Frenet ekvationen) och $b = \tau^{-1}(kt + k^{-1}t'' - \frac{k'}{k^2}t')$ från (1), och så kommer vi till

$$t''' = (\frac{k'}{k})'t' + \frac{k'}{k}t'' - (k^2)'t - k^2t' + (k\tau)'\tau^{-1}(kt + k^{-1}t'' - \frac{k'}{k^2}t') + \frac{k^2}{\tau}t'.$$

Därför

$$a = -k^2 + (k\tau)'k\tau^{-1}, b = (\frac{k'}{k})' - (k^2)' - (k\tau)'\tau^{-1}\frac{k'}{k^2} + \frac{k^2}{\tau}, c = \frac{k'}{k} + (k\tau)'\tau^{-1}k^{-1}.$$

4p

3. (a) Vi parametriserar ytan med $x = (u, v, u^2 + uv^2)$ och får

$$x_u = (1, 0, 2u + v^2)$$
$$x_v = (0, 1, 2uv)$$
$$E = 1 + (2u + v^2)^2$$
$$F = (2uv)(2u + v^2)$$
$$G = 1 + (2uv)^2$$
$$x_{uu} = (0, 0, 2)$$
$$x_{uv} = (0, 0, 2v)$$
$$x_{vv} = (0, 0, 2u)$$
$$e = 2/\sqrt{EG - F^2}$$
$$f = 2v/\sqrt{EG - F^2}$$
$$g = 2u/\sqrt{EG - F^2}$$
$$K = (eg - f^2)/\sqrt{EG - F^2}$$
$$H = (Eg - 2fF + eG)/\sqrt{EG - F^2}$$

Så $K = 0$ medföljer $eg = f^2$ dvs $u = v^2$: Gausskrökningen försvinner i punkterna $(v^2, v, 2v^4)$.

(b) I en plan punkt, $K = H = 0$. $H = 0$ i punkterna där $Eg - 2fF + eG = 0$. Vi redan vet att $K = 0$ i punkterna där $u = v^2$. Sätter det in i ekvationen för H: $H = 0$ medföljer $(1 + 9v^4)2v^2 - 24v^6 + 2(1 + 4v^6) = 0$ eller $u^3 + u + 1 = 0, u = v^2$. Funktionen $u^3 + u + 1$ är positiv för alla positiva u, så den saknar positiva nollställen. Därför finns det inte några plana punkter.

(c) Ekvationen för asymptotiska kurvor är i lokalframställning

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0.$$

Vi sätter in ekvationen till den givna kurvan i ser att asymptotiska ekvationen gäller.

4. Vi väljer för ytan parametriseringen $x = (\cos(u), \sin(u), v)$, beräknar koefficienter till första och andra fundamentalformer och skriver ekvationen till geodetiska linjer. Vår kurva satisfierar ekvationen. Om $a^2 + c^2 = 0$, so $\alpha' = 0$, så är kurvan inte reguljär.

5. (c)Vi har $H = (\frac{k_1+k_2}{2})^2, K = k_1k_2$,

$$H^2 - K = (\frac{k_1 - k_2)}{2})^2 \geq 0.$$

Om $H^2 = K$ överallt, så $0 = H^2 - K = (\frac{k_1-k_2)}{2})^2$, $k_1 = k_2$. Alla punkter är umbiliska. Enligt satsen ii kursboken, ytan som har alla punker umbiliska, är en del i en sfär.

6. Geogesiska krökningen till C med avseende på S_1 är lika med 0. Den krökningen är lika med $k \sin\phi$ där ϕ är vinkeln mellan normalen till kurvan och normalen till ytan S_1 och k är kurvans krökningen. Men normalen till S_1 är samtidigt normalen till S_2 eftersom ytor tangerar varandra. Så är geodetiska krökningen av C med avseende på S_2 också lika med 0.