Differentialgeometri, VT01. Tentamen 010321-lösningar

1. Normalkrökningen av en kurva $\alpha(t)$ på ytan S definieras som $k_n = k\cos\phi$ där ϕ är vinkeln mellan n och N. Så $k_n = k < n, N >$. Geodetiska krökningen är $\pm$ längden av kovariantderivatan av α'. Så

$$k_g = |Proj_{T(S)}\alpha''| = k|Proj_{T(S)}n| = k|N \wedge n| = k\sin\phi.$$

$$k_n^2 + k_g^2 = k^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = k^2.$$

2.Vi beräknar Christoffelsymboler och kollar kompatibilitetsvillkoren.

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}\frac{E_u}{E} = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}\frac{E_v}{G} = -\frac{1}{4}\sin v\cos v,$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}\frac{E_v}{E} = \frac{\cos v}{\sin v},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G} = 0,$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}\frac{G_u}{E} = 0,$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}\frac{G_v}{G} = 0.$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 1.$$

Om vi använder Gaussformeln som uttrycker K genom Γ, kommer vi till $K = 1/4$. Motsägelse: ytan finns inte.

3.a. Se kursboken.

b. Villkoret kan skrivas som

$$\alpha_1 - \alpha_2 = r_1 b_1 = r_2 b_2, \tag{1}$$

där r_1, r_2 är nogra funktioner. Det betyder att

$$b_1 = \pm b_2,$$

$$b_1' = \pm b_2',$$

$$\tau_1 n_1 = \tau_2 n_2.$$

Eftersom n_1, n_2 är enhetsvektorer,

$$n_1 = \pm n_2.$$

Deriverar (1):

$$t_1 - t_2 = r_1' b_1 + r b_1' = r_1' b_1 + r\tau_1 n_1. \tag{2}$$

Vektorn t_1 är ortogonal med n_1, b_1, t_2 är ortogonal med n_2, b_2, men eftersom $b_1 = \pm b_2, n_1 = \pm n_2$, t_2 är ortogonal med n_1, b_1. I det fallet (2) betyder att $r_1' = 0, r_1\tau_1 = 0$. Men kurvor är olika, $r \neq 0$, så $\tau_1 = 0$, dvs α_1 är en plan kurva. Detsamma gäller för α_2.

4.Först, kollar vi att punkten med koordinaterna

$$\mathbf{x}(u,v) = (a\sinh u\cos v, b\sinh u\sin v, c\cosh u)$$

ligger på ytan. Vi sätter dessa funktioner in i ytans ekvation och ser att det gäller eftersom

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1, \sinh^2 u + 1 = \cosh^2 u.$$

Avbildningen är 'ett-till-ett' på varje område $0 < u < \infty, \alpha < v < \alpha + 2\pi$. Vi beräknar nu

$$\mathbf{x}_u = (a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u),$$

$$\mathbf{x}_v = (-a\sinh u\sin v, b\sinh u\cos v, 0),$$

$$\mathbf{x}_{uu} = (a\sinh u\cos v, b\sinh u\sin v, c\cosh u),$$

$$\mathbf{x}_{uv} = (-a\cosh u\sin v, b\cosh u\cos v, 0),$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (-a\sinh u\cos v, -b\sinh u\sin v, 0),$$

$$E = \cosh^2 u(a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v) + c^2\sinh^2 u,$$

$$F = (b^2 - a^2)\cos v\sin v\cos^2 v\sin^2 v,$$

$$G = \sinh^2 u(a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v),$$

$$(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) = (-bc\sinh^2 u\cos v, -ac\sinh^2 u\sin v, ab\sinh u\cosh u),$$

$$EG - F^2 = |(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)|^2 = \sinh^2 u(b^2c^2\sinh^2 u\cos^2 v + a^2c^2\sinh^2 u\sin^2 v + a^2b^2\cos^2 v),$$

$$e = < \mathbf{x}_{uu}, (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) > / \sqrt{(}EG - F^2) = \frac{abc\sinh u}{\sqrt{(}EG - F^2)},$$

$$f = 0$$

,

$$g = \frac{abc\sinh^3 u}{\sqrt{(}EG - F^2)},$$

$$eg - f^2 = (abc)^2\frac{\sinh^4 u}{(EG - F^2)} = (abc)^2\frac{\sinh^2 u}{b^2c^2\sinh^2 u\cos^2 v + a^2c^2\sinh^2 u\sin^2 v + a^2b^2\cos^2 v},$$

$$K = \frac{(abc)^2}{(b^2c^2\sinh^2 u\cos^2 v + a^2c^2\sinh^2 u\sin^2 v + a^2b^2\cos^2 v)^2},$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG + gE}{(EG - F^2)} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{abc\sinh u(\sinh^2 u(a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v)) + abc\sinh^3 u(\cosh^2 u(a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v) + c^2\sinh^2 u)}{(EG - F^2)^{3/2}},$$

$$H = \frac{1}{2}abc\frac{a^2 + b^2 + c^2\sinh^2 u}{(b^2c^2\sinh^2 u\cos^2 v + a^2c^2\sinh^2 u\sin^2 v + a^2b^2\cos^2 v)^{3/2}}.$$

Efter det, $k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$. Koordinatlinjerna: $u = u_0$: z-koordinaten är konstant, kurvan på S är en ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\cosh^2 u_0}{c^2} - 1$$

och ligger i planen $z = c\cosh u$. $v = v_0$: kvoten mellan x och y-koordinaterna är konstant, $\frac{y}{x} = \frac{a}{b}\tan v_0$. I den planen koordinatkurvan är en hyperbola

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}(1 + (\frac{a}{b}\tan v_0)^2) = 1.$$

5. Se kursboken.

6. Låt $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$. Regelvektorn $w(t)$ är ortogonal med z-axeln, så innehåller inte z-komponenten. $w(t)$ passerar genom $\alpha(t)$ och z-axeln, så är $w(t)$ parallel med $(t, t^2, 0)$. Normering ger

$$w(t) = \frac{(1, t, 0)}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

För att hitta striktionskurvan $\beta(t)$, beräknar vi

$$w' = \frac{(-t, 1, 0)}{(1 + t^2)^{3/2}},$$

$$\beta(t) = \alpha(t) - \frac{< \alpha', w' >}{< w', w' >} w(t) = (t, t^2, t^3) - (t, t^2, 0) = (0, 0, t^3),$$

alltså är z-axeln striktionskurvan. Singuljära punkter kan hända om $< \beta' \wedge w, w' > / |w'|^2 = 0$, eller $t = 0$.