Differentialgeometri, VT01. Tentamen 010409-lösningar

1. Vi kan beskriva villkoret som

$$< \mathbf{e}, \mathbf{t} >= 0.$$

Deriverar:

$$< \mathbf{e}, \mathbf{t}' >= k < \mathbf{e}, \mathbf{n} >= 0.$$

Om $k = 0$, så är kurvan en rät linje - ligger i en plan. Annars, om $k \neq 0, < \mathbf{e}, \mathbf{n} >= 0$, så deriverar en gång till,

$$< \mathbf{e}, -k\mathbf{t} - \tau\mathbf{b} >= -k < \mathbf{e}, \mathbf{t} > -\tau < \mathbf{e}, \mathbf{b} >= -\tau < \mathbf{e}, \mathbf{b} >= 0.$$

Eftersom en icke-noll vektor $\mathbf{e}$ inte kan ha noll skalärprodukt med alle tre vektorer i Frenetbasen, så $< \mathbf{e}, \mathbf{b} > \neq 0$, och därför $\tau = 0$, och kurvan ligger i en plan.

2. Vi har $\alpha' = (a, c, 2t)$, $\alpha'' = (0, 0, 2)$. Så, vektorn $\alpha' \wedge \alpha''$ som är ortogonal med den tangenta planen är lika med

$\mathbf{p} = \alpha' \wedge \alpha'' = (2c, -2a, 0)$. Ekvationen till tangentplanen som passerar genom punkten $\alpha(t)$ är

$$< (x, y, z) - \alpha(t)), \mathbf{p} >= 0,$$

eller

$$(x - (at + b))(2c) + (y - (ct + d))(-2a) = 0,$$

$$(x - b)c - (y - d)a = 0.$$

Så, i verklighet, ekvationen till tangentplanen beror inte på t, dvs är samma för alla punkter på kurvan.

3. För en asymptotisk kurva $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, men båglängdsparametrisering, enligt definitionen har vi

$$< dN(\alpha'), \alpha' >=< N(\alpha)', \alpha' >= 0. \qquad (1)$$

Vi har $< N, \alpha' >= 0$ (N är en normalvektor, α' en tangentvektor till ytan). Deriverar det:

$$< N(\alpha), \alpha' >' =< N', \alpha' > + < N, \alpha'' >= 0.$$

Tillsammans med (1), ger det

$$< N, \alpha'' >= 0. \qquad (2)$$

Så, N är ortogonal både med α' och $\mathbf{n} = k^{-1}\alpha''$. Men binormalen till α är också ortogonal med dessa två vektorer, så $b = \pm N$.

Vi deriverar den sista ekvationen

$$N' = \pm\mathbf{b}' = \pm\tau\mathbf{n},$$

så

$$\tau^2 = |\mathbf{b}'|^2 = |N'|^2.$$

Det enklaste sätt att beräkna det sista uttrycket är att välja speciella koordinater, med koordinatlinjerna längs principala riktningar. I det fallet, har vi

$$\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \tag{3}$$

$$N' = k_1 \mathbf{x}_u u' + k_2 \mathbf{x}_v v'. \tag{4}$$

För en ortogonal parametrisering,

$$F =< \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v >= 0. \tag{5}$$

Kvadrera (3), (4) och använd (5):

$$|\alpha'|^2 = Eu'^2 + Gv'^2, \tag{6}$$

$$|N'|^2 = k_1^2 Eu'^2 + k_2^2 Gv'^2. \tag{7}$$

Multiplikation av (3) och (4) ger

$$0 =< N', \alpha' >= k_1 Eu'^2 + k_2 Gv'^2. \tag{8}$$

Eftersom vi har båglangdsparametrisering, så i (6):

$$|\alpha'|^2 = Eu'^2 + Gv'^2 = 1. \tag{9}$$

Slutligen multiplicerar vi (8) med $(k_1 + k_2)$:

$$0 = (k_1 Eu'^2 + k_2 Gv'^2)(k_1 + k_2) = k_1^2 Eu'^2 + k_2^2 Gv'^2 + k_1 k_2 (Eu'^2 + Gv'^2). \tag{10}$$

Nu sätter vi (7) och (9) in i (10):

$$|N'|^2 + k_1 k_2 = \tau^2 + K = 0.$$

4. I normalplanen till kurvan i punkten $\alpha(s)$, kan man ta vektorerna $\mathbf{n}$ och $\mathbf{b}$ som en bas. Då är ekvationen till cirkeln med radie a som ligger i normalplanen och har centern i $\alpha(s)$:

$$\mathbf{x}(s, v) = \alpha(s) + a\mathbf{n} \cos v + a\mathbf{b} \sin v, \tag{11}$$

där $0 \leq v < 2\pi$. Så, för variabla s är (11) ekvationen till vår yta.

För att avgöra om ytan är reguljär, beräknar vi $\mathbf{x}_s$ och $\mathbf{x}_v$:

$$\mathbf{x}_s = \alpha' + a\mathbf{n}' \cos v + a\mathbf{b}' \sin v.$$

Vi använder Frenetekvationer:

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{t} + a(-k\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}) \cos v + a\tau\mathbf{n} \sin v = (1 - ak \cos v)\mathbf{t} + a\tau \sin v\mathbf{n} - a\tau \cos v\mathbf{b}.$$

$$\mathbf{x}_v = -a\mathbf{n} \sin v + a\mathbf{b} \cos v.$$

Ytan är reguljär om $\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_v \neq 0$:

$$\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_v = -a \cos v(1 - ak \cos v)\mathbf{n} + a(1 - ak \cos v) \sin v\mathbf{b},$$

$$|\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_v|^2 = a^2(1 - ak \cos v)^2,$$

det betyder, att om $0 < a < 1/k$, så $|\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_v| \neq 0$, och ytan är reguljär.

5. Se kursboken.

6. För at visa att ytan är lokalt isometrisk med planen, måste man hitta parametrisationer där första fundamentalformer av ytor har samma koefficienter. Vi tar en annan kurva som generatris till konen, $\beta = \alpha/|\alpha|$ och tar båglangdsparametrisering till $\mathbf{b}$. Så har var kon parametrisering $\mathbf{x}(s,v) = v\mathbf{b}(s)$. För konen har vi

$$\mathbf{x}_s = v\beta'(s), \mathbf{x}_v = \alpha, E = v^2|\beta'|^2 = v^2, F = v < \beta, \beta' >= 0,$$

eftersom $|\beta| = 1$, $G = |\alpha|^2 = 1$.

För x, y-planen i rymden tar vi polära koordinater, $x(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi, 0)$. Så har vi $\mathbf{x}_r = (\cos\phi, \sin\phi, 0), \mathbf{x}_\phi = (-r\sin\phi, r\cos\phi, 0)$, därför

$$E = 1, F = 0, G = r^2.$$

Det betyder att för avbildningen $r = v, \phi = s$, har ytor lika första fundamentalformer.