MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Föreläsare: Grigori Rozenblioum (5309)

Dag: 2002-0320, tid: 8.45-13.45
Hjälpmedel: bilagan
Telefonvakt: Martin Brundin, 0740-350646

Tentamensskrivning i Differentialgeometri, MAN500

1. (a) Härled, under lämplig förutsättning, Frenets ekvationer.

   (b) För kurvan $\alpha(s)$ med båglängdsparametrisering, låt $\phi(s)$ vara vinkeln mellan binormalen och räta linjen $L : (2t, 3t+4, 5t-1)$ och $\theta(s)$ vara vinkeln mellan tangentvektorn och L. Bevisa att
$$\frac{\theta'}{\phi'} = \frac{k \sin\phi}{\tau \sin\theta}.$$
4p

2. (a) Ge definition till en parametriserad kurva. Vilka punkter kallas för singulära?
(b) En kurva $\alpha(t)$ i rymden har egenskapet: $\alpha'(t) \neq 0$ för $t \neq 0$, $\alpha'(0) = 0, \alpha''(0) = 0, \alpha'''(0) \neq 0$. Visa att med båglängdsparametrisering blir kurvan regulär (det räcker att bevisa att $d\alpha/ds$ är kontinuerlig).
(c) granska (b) om $\alpha'(0) = 0, \alpha''(0) \neq 0$. 4p

3. För en yta S, E, F, G är konstanta.

   (a) Bevisa att Gausskrökningen är lika med 0.

   (b) Bevisa att alla punkter är paraboliska eller plana.
   I fortsättninger, låt e, f, g vara också konstanta.

   (c) Bevisa att alla punkter är paraboliska eller alla punkter är plana.

   (d) Låt alla punker vara paraboliska. Bevisa att krökningslinjerna beskrivs av räta linjer i $u - v$ koordinater.

   (e) Bevisa att N är konstant längs en familj av krökningslinjer.

   (f) Bevisa att alla krökningslinjer är geodeter.

   (g) Bevisa att en familj av krökningslinjer är räta linjer på ytan.

   (h) Bevisa att den andra familjen krökningslinjer är delar av cirklar med samma radie.

   (i) Bevisa att ytan är en del av en cylinder.

   Man kan lösa deluppgifter i valfri ordning. T.ex., kan man anta att delar (a)-(d) är bevisade och bevisa del (e). Men högsta betyg får man för deluppgifter i naturliga ordningen
   12p

4. Ge definitionen till parallella vektorfält och geodeter. Bevisa att kurvor $v^3/u^2 = c$ är geodeter för ytan med $\mathrm{I}(u', v') = v^2 u'^2 - 2uvu'v' + 2u^2 v'^2$. 4p

Efter skrivningstidens slut finns lösningsförslag på kursens hemsida. Skrivningen beräknas vara färdigrättad 27. mars.