Tentamensskrivning i Differentialgeometri, MAN500

1. (a) SE kursboken.

   (b) Beteckna enhetsvektorn längs den räta linjen med $\mathbf{e}$. Så har vi $\cos\phi = \mathbf{be}, \cos\theta = \mathbf{te}$. deriverar och kommer till ekvationer

$$-\sin\phi\phi' = \mathbf{b}'\mathbf{e} = -\tau\mathbf{ne},$$

$$-\sin\phi\theta' = \mathbf{t}'\mathbf{e} = -k\mathbf{ne}.$$

   Vi delar en ekvation med andra och kommer till vår formel.

2. (a) Se kursboken, (b) Från Taylorformeln för funktion α', följer

$$\alpha'(t) = \alpha'''(0)/2t^2 + O(t^3),$$

$$|\alpha'(t)| = \alpha'''(0)/2t^2 + O(t^3).$$

   Därför

$$d\alpha/ds = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{\alpha'''(0)/2 + O(t)}{|\alpha'''(0)/2 + O(t)|}$$

   är kontinuerlig och $\neq 0$.

   (c) Från Taylorformeln följer att $\alpha'(t) = t\alpha'(0) + O(t^2)$. Om vi antar att vid båglängdsparametriseringen s kurvan blir regulär, så har vi för $t \neq 0$ $d\alpha/ds = \frac{d\alpha/dt}{ds/dt} = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$. Därför för $t > 0$,

$$\lim_{t\to 0+0} d\alpha/ds = \frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|},$$

$$\lim_{t\to 0-0} d\alpha/ds = \frac{-\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|}.$$

   Och vi kan se att $d\alpha/ds$ inte är kontinuerlig i punkten $t = 0$. 4p

3. För en yta S, E, F, G är konstanta.

   (a) Alla Christoffelsymboler uttrycks genom derivator av E, F, G, därför alla är 0. Enligt Gaussformeln, uttrycks Gausskröknigen genom Christoffelsymboler, därför $K = 0$.

   (b) $k_1k_2 = K = 0$, enligt (a). Därför en av $k_{1,2}$ är 0. Om bägge är 0, så har vi en plan punkt, om bara en huvudkrökning är 0, så har vi en parabolisk punkt.
   I fortsättninger, låt e, f, g vara också konstanta.

   (c) k_1, k_2 uttrycks genom e, f, g, E, F, G därför är de konstanta. Se (b).

   (d) Ekvationen för krökningslinjerna har koefficienter som uttryks genom e, f, g, E, F, G, därför är de konstanta. När vi löser kvadratekvationen, kommer vi till två ekvationer för krökningslinjerna: $A_\pm u' + B_\pm v' = 0$. De är ekvationer för räta linjer i $u - v$ planet

   (e) Låt $k_1 = 0$. Rodriguessats säger att för krökningslinje $\alpha(t)$ som motsvarar huvudkrökningen k_1, har vi $\mathbf{N}' = k_1\alpha'$, därför är det 0.

   (f) Eftersom alla Christoffelsymboler $= 0$, har ekvationer för geodeter formen $u'' = 0, v'' = 0$. Alla linjära funktioner satisfierar dessa ekvationer. Det ger räta linjer i $u - v$-planet.

   (g) Krökningslinjerna som motsvarar $k_1 = 0$ är samtidigt geodeter. Därför längs dessa linjer har vi samtidigt $\mathbf{N}' = 0$ ock $\mathbf{n} = \mathbf{N}$. Därför $\mathbf{n}' = 0$; Frenet ger $k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} = 0$, $k = 0$, och linjerna är räta.

(h) Krökningslinjerna som motsvaraar $k_2 \neq 0$ är samtidigt geodeter. Därför längs dessa linjer har vi samtidigt $\mathbf{N}' = k_2\mathbf{t}$ ock $\mathbf{n} = \mathbf{N}$. Frenet ger $k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} = k_2\mathbf{t}$, $\tau = 0$,$k = k_2$, kurvan ligger i ett plan och har en konstant krökning $k = k_2$, därför är kurvan en cirkel med radie $r = k_2^{-1}$.

(i) För en krökningslinje som motsvarar k_2, har vi $\mathbf{b}$ konstant, enligt (h). $\mathbf{b}$ är ortogonal med $\mathbf{t}$ och $\mathbf{N}$, dvs är $\mathbf{b}$ en tangentvektor till planet som är ortogonal med $\mathbf{t}$. Huvudriktningen som motsvarar $k_1 = 0$ är ortogonal med $\mathbf{t}$. Det betyder att all räta linjer som är krökningslinjerna motsvarande $k_1 = 0$ är parallella med $\mathbf{b}$ och därför parallella med varandra. Cirklar är ortogonala med dessa räta krökningslinerna och därför ar cirklarnas plan parallella med varandra. Eftersom cirklar har samma radie, $r = k_2^{-1}$, formar dessa cirklar en cylinder. .

4. Vi har $E = v^2, F = -uv, G = 2u^2$. Vi beräknar Christoffelsymboler, skriver ekvationer för geodeter och kollar att våra kurvor (vi väler någon parametrisering, t.ex. $u = ct^3, v = ct^2$) satisvierar dessa ekvationer