MATEMATIK Dag: 2002-06-12, tid: 8.45-13.45

Differentialgeometri Lösnningar

1. Se kursboken.

2. (a) Sätter vi $x = v\cos u, y = v\sin u, z = u$, så har vi att $y\cos z - x\sin z = 0$. Så är S en ekvationsyta $F(x,y,z) = 0$, $F(x,y,z) = y\cos z - x\sin z$. Gradienten till F är lika med
$$(-\sin z, \cos z, -y\sin z - x\cos z)$$
som aldrig är 0. Därför är S en orienterbar reguljär yta.

   (b) Vi har global parametrisering av S, så vi kan skriva $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$. Differentialekvationen för geodeten $\gamma(t), |\gamma'| = 1$ ger att dessa satisfierar
$$0 = u'' + \Gamma^1_{11}u'^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + G^1_{22}v'^2$$
$$0 = v'' + \Gamma^2_{11}u'^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + G^2_{22}v'^2.$$
Vi beräknar Kristoffelsymbolerna
$$\mathbf{x}_u = (-v\sin u, v\cos u, 1)$$
$$\mathbf{x}_v = (\cos u, \sin u, 0)$$
$$N = (-\sin u, \cos u, -v)/\sqrt{1+v^2}$$
$$\mathbf{x}_{uu} = (-v\cos u, -v\sin u, 0) = -v\mathbf{x}_v$$
$$\mathbf{x}_{uv} = (-\sin u, \cos u, 0) = (v/(1+v^2))\mathbf{x} + (1/\sqrt{1+v^2})N$$
$$\mathbf{x}_{vv} = 0.$$
Den första ekvationen för geodeten blir alltså $0 = u'' + 2u'vv'/(1+v^2)$, eller $(u'(1+v^2))' = 0$. Detta ger att $u' = c/(1+v^2)$ där c är en konstant. Därför $v' = \pm\sqrt{1-c^2}/(1+v^2)^2$. Vi får nu att
$$\cos\theta = < \mathbf{x}_u, \gamma' > /|\mathbf{x}_u| = < \mathbf{x}, u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v > /|\mathbf{x}_u| = c/\sqrt{1+v^2}$$

.

3. Vi kan parametrisera S som $x = \cos u\sin v, y = \sin u\sin v, z = 2\sin v, 0 < u < 2\pi, -\pi/2 < v < \pi/2$. Vår kurva parametriseras som $v = /pi/6$. Vi beräknar den andra fundamentalformen och matrisen $dN = (a_{ij})$ enligt formler i formelbilagan. Vi hittar att för vektorn $\alpha' = (1,0)$ som är tangentvektorn till kurvan $v = /pi/6$, satisfierar $dN(\alpha') = \lambda\alpha'$, och evter från Rodriguessatsen följer det att kurvan är en krökningslinje. Parallelltransporten ändrar inte längden av en vektor, enligt satsen i kursboken.

4. Kurvans tangentvektor är normal till normalplanet (som spänns av normalen och binormalen). Kurvans tangent är
$$\alpha' = (2\sin t\cos t, 2\sin^2 t - 1, -\sin t)$$
För att bevisa att nornmalplanet passerar genom origo, räcker det att visa att vektorn α ligger i normalplanet, d.v.s. α är ortogonal till α', eller $\alpha\alpha' = 0$. Vi beräknar den sista produkten och hittar att i verklighet den är 0.

5. Om $\alpha(s)$ är en båglängdsparametriserad kurva på S med normalen N, ges den geodesiska krökningen av α av
$$k_g =< N, \alpha' \times \alpha'' > .$$
Vår kurva är ej parametriserad av båglängden, $d\alpha/dt = (0, 1, -2t), |d\alpha/dt| = \sqrt{1 + 4t^2}$ så vi måste byta parametrisering. Om s är båglängdparameteern, så, enligt kedjeregeln,
$$d\alpha/ds = d\alpha/dt\ dt/ds, dt/ds = |d\alpha/dt|^{-1}, d^2\alpha/ds^2 = (dt/ds)^2 d^2/dt^2 + d^2t/ds^2 d\alpha/dt,$$
$$d\alpha/ds \times d^2\alpha/ds^2 = (dt/ds)^3 d\alpha/dt \times d^2\alpha/dt = d\alpha/dt \times d^2\alpha/dt|d\alpha/dt|^{-3}.$$
Vi får alltså
$k_g =< N, d\alpha/dt, d^2\alpha/dt^2 > |d\alpha/dt|^{-3}$. För vår kurva,
$$\alpha' = (0, 1, -2t), \alpha'' = (0, 0, -2), N = (6, -2t, -1)/\sqrt{36 + 4t^2 + 1}.$$
Den geodetiska krökningen blir alltså
$$k_g = -12/\sqrt{36 + 4t^2 + 1}(1 + 4t^2)^{3/2}.$$

6. Låt $et = c$ för någon enhetsvektor e och konstant c. Eftersom $|c| < 1$, kan vi sätta $c = \cos\theta$. Deriverar och använder Frenet: $et' = ken = 0$. $k \neq 0$, eftrsom annars kunde vi inte definiera τ. Därför $en = 0$. Så ligger e i $(tb)-$ planet. Vinkel mellan e, t är konstant, b är ortogonal till t, so är vinkeln mellan e, b konstant, $eb = \sin\theta$. Deriverar en gång till: $en' = 0 = e(-kt - \tau b) = -k\cos\theta - \tau\sin\theta = 0$. Så blir $\tau k = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, konstant.

Å andra sidan, om $\tau k = c, ck - \tau = 0$, Definera $e = ct - b$. Vi har $e' = ct' - b' = (ck - \tau)n$=(**Frenet**)$= 0$. Så är vektorn e konstant och $et = c$ är konstant.