Tentamensskrivning i Differentialgeometri, MAN500

1. (a) Se kursboken.

   (b) Torsionen är definerad endast om krökningen inte är noll.

   (c) Vi har

$$\alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t, 2),$$
$$\alpha''(t) = (\sin t, \cos t, 0),$$
$$\alpha'''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0),$$

så

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{6 - 2\cos t},$$
$$|\alpha' \times \alpha''(t)| = \sqrt{5 - 2\cos t + \cos^2 t},$$
$$(\alpha' \times \alpha'')\alpha''' = -2.$$

Deta ger

$$k = \frac{|\alpha' \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} = \frac{\sqrt{5 - 2\cos t + \cos^2 t}}{\sqrt{6 - 2\cos t}^3}$$

och

$$\tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'')\alpha'''}{|\alpha' \times \alpha''(t)^2} = \frac{2}{5 - 2\cos t + \cos^2 t}.$$

2. (a) För att visa att $\mathbf{x} = (u\cos v, u\sin v, v + \ln u)$ är en reguljär homeomorfi från $U = \{u > 0, v \in \mathbb{R}\}$ till $\mathbf{x}(U)$, beräknar vi $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ och så får vi

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (\sin v - \cos v)^2 + (-\cos v + \sin v)^2 + u^2 > 0$$

så $\mathbf{x}$ är reguljär. Om

$$\mathbf{x}(u, v) = (x, y, z),$$

är $u = \sqrt{x^2 + y^2}, v = z - \ln(x^2 + y^2)/2$, så $\mathbf{x}$ har en kontinuerlig invers. Därmed är $\mathbf{x}$ en (global) parametrisering av $\mathbf{x}(U)$ som alltså är en reguljär yta. (b)Vi bestämmer E, F, G, e, f, g med hjälp av vanliga formler: $E = 1 + 1/u^2$; $F = 1/u$; $G = 1 + u^2$; $EG - F^2 = 2 + u^2$; $e = -1/(u\sqrt{EG - F^2})$;, $f = -1/\sqrt{EG - F^2}$; $g = u/\sqrt{EG - F^2}$. Dettta ger $K = -2/(2 + u^2)^2, H = 2/(u(2 + u^2)^{3/2})$. (c)Av formeln för K ser vi att alla punkter är hyperboliska..

3. Eftrsom komponenter av f uppenbartr är glatta funktioner av koordinaterna x, y, z), så räcker det att visa att f avbildar enhetssfären till enhetssfären, dvs att $|p|^2 = 1$ medföljer $|f(p)^2 = 1$. Antag att $p = (x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Vi har då

$$|f(p)^2 = ((x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + z^2)/(z^4 - z^2 + 1)$$
$$= ((x^2 + y^2)^2 + z^2)/(z^4 - z^2 + 1) = ((1 - z^2)2 + z^2)/(z^4 - z^2 + 1) = 1.$$

Jacobianen df_p av funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av matrisen som består av partiella derivator av f. I punkten $p = (x, y, z)$ på enhetssfären väljer vi normalen $N(p) = p$. Nu väljer vi en bas i tangentrummet $T_p(S^2)$ till S^2 i punkten p, dvs 2 vektorer som är ortogonala med N, till exempel, $e_1(p) = (y, -x, 0), e_2(p) = e_1(p) \times N(p) = (-xz, -yz, x^2 + y^2)$. Avbildningen df_p ger oss följande vektorer i $T_{f(p)}(S^2)$:

$$df_p(e_1(p)) = \frac{2}{\sqrt{z^4 - z^2 + 1}},$$

vi ser allså att $df_p(e_1(p)) = 2df_p(e_1(p))$. Eftersom df_p ändrar lklängden av vektoren $e_1(p)$, kan den aldrig varta en isometri. Notera att vi inte behöver beräkna $df_p(e_2(p))$.

Beräkningarna ovan förutsätter att p inte är $(0, 0, \pm 1)$ (i detta fall blir våra vektorer $e_{1,2}(p)$ 0. Men då kan vi välja $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$ och se att $df(e_1) = 0$, så df kan inte ens vara en isomorfi i dessa fall.

4. Fär att bevisa att kurvan ligger på ytan sätter vi in kurvans koordinatfunktioner i ytans ekvation,

$$(e^t \cos t)^1 + (e^t \sin t)^2 = (e^t)^2$$

, så i verklighet, ligger kurvan på ytan. Nu beräknar vi

$$\alpha', \alpha''$$

Eftersom S är en ekvationsyta, så kan vi valja normalen enligt regeln,

$$N = (x, y, -z)/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

. Så blir geodetiska krökningen

$$k_g = det(N, \alpha', \alpha'')/|\alpha'|^3.$$

Vi har alltså

$$k_g = e^{-t}/\sqrt{6}.$$

5. (a), (b), (c)- se kursboken.

(d): Om ϕ är vinkel mellan riktningen e och huvudriktningen e_1, så blir normalkrökningen i riktningen e lika med

$$k_n(e) = k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi.$$

Nu om e' är en vektor som är ortogonal med e, med vinkeln $\phi' = \phi + \pi/2$, so har vi

$$\cos^2 \phi' = \sin^2 \phi, \sin^2 \phi' = \cos^2 \phi,$$

alltså

$$k_n(e) + k_n(e') = k_1 + k_2 = 2H.$$

6. Vi beräknar $\alpha', \alpha'', \alpha''$ och hittar torsionen enligt formler i Problem 1, $\tau = 3b/(b^2 + 9)$. Vi maximerar funktionen med hjälp av derivatan och hittar att τ är störst vid $b = 3$.