Differentialgeometri, VT01

INLAMNINGSUPPGIFT 1 — LÖSNINGAR

1. Eftersom $\alpha'' = \alpha' \wedge a$ är ortogonal mot α',

$$|\alpha' \wedge \alpha''| = |\alpha'||\alpha' \wedge a|.$$

Så

$$(\alpha' \wedge \alpha'')(\alpha' \wedge \alpha'') = |\alpha' \wedge \alpha''|^2 = |\alpha'|^2|\alpha' \wedge a|^2.$$

Också

$$\alpha''' = (\alpha' \wedge a)' = \alpha'' \wedge a = (\alpha' \wedge a) \wedge a = (\alpha' a)a - a^2\alpha'$$

$$\alpha' \wedge (\alpha'' \wedge \alpha''') = \alpha''(\alpha'\alpha''') - \alpha'''(\alpha'\alpha'')$$

Eftersom α' är ortogonal mot α'', försvinner den andra termen ovan, och $\alpha' \wedge (\alpha'' \wedge \alpha''') = (\alpha' \wedge a)(\alpha'(\alpha' a)a - a^2\alpha')) = (\alpha' \wedge a)((\alpha' a)^2 - a^2\alpha'^2)$.

2. a. Vinkeln mellan tangenten och någon riktning, t.ex., x-axeln, $\phi(s)$ satisfierar $\phi' = k(s) = (as)^{-1}$. Så vi har

$$\phi(s) = \int k(s)ds = \frac{\ln s}{a}.$$

Efter det hittar vi

$$x(s) = \int \cos\phi(s)ds = \int \cos(\frac{\ln s}{a})ds = \frac{as}{a^2+1}(a\cos\frac{\ln s}{a}) + \sin\frac{\ln s}{a},$$

$$y(s) = \int \sin\phi(s)ds = \int \sin(\frac{\ln s}{a})ds = \frac{as}{a^2+1}(a\sin\frac{\ln s}{a}) - \cos\frac{\ln s}{a}.$$

Mer bekvämare är att beskriva i poljära koordinaterna:

$$\rho = \exp(\theta)$$

Andra kurvor hittar man om man kommer ihåg att krökningen definierar kurvan upp till en stel rörelse. Så adderar man koordinater till en godtycklig punkt till $x(s), y(s)$, och roterar, dvs adderar en godtycklig vinkel ϕ_0 till $\phi = \frac{\ln s}{a}$.

b. På samma sätt,

$$\phi(s) = \int \frac{\alpha}{a^2+s^2}ds = \arctan\frac{s}{a}.$$

Alltså

$$x(s) = \int \cos\arctan\frac{s}{a}ds = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2+s^2}}ds = a^2\ln(s+\sqrt{a^2+s^2}),$$

$$y(s) = \int \sin\arctan\frac{s}{a}ds = \int \frac{as}{\sqrt{a^2+s^2}}ds = a\sqrt{a^2+s^2}.$$

3. a. Vi parametriserar kurvan som $\alpha(t) = (t, -\ln\cos t)$. Det är inte en båglängdsparametrisation, så använder man den generella formeln för krökningen:

$$k(t) = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3} = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Vi beräknar derivator och kommer till

$$k(t) = \cos t$$

b. Vi använder samma formel för krökningen,

$$k(t) = \frac{3\cos t + 2}{4\sqrt{2}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}}.$$

I punkterna där $\cos t = 1$, dvs $t = 2\pi n$, gäller formeln inte, dessa punkter är singuljära för kurvan, eftersom både x' och y' är lika med 0.

4. Vi beräknar $\alpha'(t) = (2, t^{-1}, 2t)$, $|\alpha'(t)| = t^{-1} + 2t$.

Tangenten är $\mathbf{t} = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{(2t, 1, 2t^2)}{1+2t^2}$.

$$\mathbf{t}' = \frac{(2-4t^2, -4t, 4t)}{(1+2t^2)^2}.$$

Normalen är

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{|\mathbf{t}'|} = \frac{(2-4t^2, -4t, 4t)}{1+2t^2}.$$

Binormalen är

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} = \frac{(2t+4t^3, -2t^2-4t^4, -2t^2-1)}{(1+2t^2)^2}.$$

Krökningen beräknar vi med hjälp av formeln i Problem 3,

$$k = \frac{2t}{(1+2t^2)^2}$$

och torsionen som

$$\tau = -\frac{(\alpha' \wedge \alpha'')\alpha'''}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2} = \frac{2t}{(1+2t^2)^2}.$$