Lösningar till tentamensskrivningen
MAN500, Differentialgeometri, 20030322

1. a) Härled, under lämplig förutsättning, Frenets ekvationer för en båglängdsparametriserad kurva i $\mathbb{R}^3$.
b) Uttryck krökningen och torsionen av en godtycklig reguljär parametriserad kurva α med hjälp av storheterna α', α'' och α'''.

Se kursboken.

2. Låt $\varphi\colon S_1 \to S_2$ vara en kontinuerlig avbildning från en reguljär yta S_1 till en reguljär yta S_2. När sägs φ vara differentierbar i punkten $p \in S_1$? Visa att definitionen inte beror på val av lokala parametriseringen.

Avbildningen φ är differentierbar i punkten $p \in S_1$ om det finns parametriseringar $\mathbf{x}_1\colon U_1 \to S_1$ och $\mathbf{x}_2\colon U_2 \to S_2$ med $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ och $\varphi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$ så att sammansättningen $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1\colon U_1 \to U_2$ är differentierbar i $\mathbf{x}_1^{-1}(p) \in U_1$.
Om nu $\mathbf{y}_1\colon V_1 \to S_1$ och $\mathbf{y}_2\colon V_2 \to S_2$ är andra parametriseringar, så är koordinatbyten $\mathbf{y}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_2$ och $\mathbf{y}_1^{-1} \circ \mathbf{x}_1$ diffeomorfier (på den öppna mängder där de är definierade) och $\mathbf{y}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{y}_1 = (\mathbf{y}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_2) \circ \mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 \circ (\mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{y}_1)$ är differentierbar som sammansättning av differentierbara funktioner (av två variabler).

3. Ange de asymptotiska kurvorna till funktionsytan $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$. Bestäm i varje punkt principalriktningarna. Bonuspoäng för beräkning av krökningslinjerna.

Sätt $\mathbf{x}(u,v) = (u,v,uv)$. Då är

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u &= (1,0,v)\\
\mathbf{x}_v &= (0,1,u)\\
\mathbf{x}_{uu} &= (0,0,0)\\
\mathbf{x}_{uv} &= (0,0,1)\\
\mathbf{x}_{vv} &= (0,0,0)
\end{aligned}$$

Detta ger $E = 1+u^2$, $F = uv$ och $G = 1+v^2$. Därmed är $EG - F^2 = 1+u^2+v^2$, så $e = g = 0$, $f = 1/\sqrt{1+u^2+v^2}$. Differentialekvationen för asymptotiska kurvor är $e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2$. Insättning ger $u'v' = 0$, så de asymptototiska kurvorna är precis koordinatkurvorna.
Principalriktningarna är egenvektorerna till

$$-dN = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -uv & 1+u^2 \\ 1+v^2 & -uv \end{pmatrix} .$$

(Obs: formel (3), S. 155, i boken beskriver den transponerade matrisen.) Faktorn framför matrisen kan glömmas för att beräkna egenvektorerna. Egenvärdena till $\begin{pmatrix} -uv & 1+u^2 \\ 1+v^2 & -uv \end{pmatrix}$

är $-uv \pm \sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}$ med egenvektorer $\begin{pmatrix} \sqrt{1+u^2} \\ \pm\sqrt{1+v^2} \end{pmatrix}$.
Differentialekvationerna för krökningslinjerna följer nu direkt: att vektorn $\binom{u'}{v'}$ har samma riktning som en egenvektor ger

$$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} = \pm\frac{v'}{\sqrt{1+v^2}} \ .$$

Integration leder till $\ln|u+\sqrt{1+u^2}| - \pm\ln|v+\sqrt{1+v^2}| = C$ eller $u+\sqrt{1+u^2} = D(v+\sqrt{1+v^2})$, resp $(u+\sqrt{1+u^2})(v+\sqrt{1+v^2}) = D$.
Alternativt kan man utnyttja differentialekvationen

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

som i detta fall ger $\frac{1+v^2}{\sqrt{1+u^2+v^2}}(u')^2 = \frac{1+u^2}{\sqrt{1+u^2+v^2}}(v')^2$.

4. **Betrakta konen**

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = a^2(x^2+y^2),\ z>0\ \} \ ,$$

där $a \in \mathbb{R}_+$. Beskriv geodeterna på ytan. För vilka värden av a finns det geodeter som skär sig själva?

Konen minus en generator är isometrisk med en sektor i planet. En parametrisering är

$$\mathbf{x}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, ar), \qquad r>0,\ -\pi<\varphi<\pi,$$

med $E = 1+a^2$, $F=0$ och $G=r^2$. Sektorn parametriseras med polarkoordinater: $x = r\sqrt{1+a^2}\cos\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}$, $y = r\sqrt{1+a^2}\sin\frac{\varphi}{\sqrt{1+a^2}}$, $r>0$, $-\pi<\varphi<\pi$, så igen $E = 1+a^2$, $F=0$ och $G=r^2$. Sektorn är symmetrisk om x-axeln och vinkelfältet har storlek $2\pi/\sqrt{1+a^2}$.
Geodeterna är bilderna av räta linjer i planet. Linjer genom genom origon ger linjer på konen genom origon. Alla andra geodeter går i båda riktningar mot oändligheten.
För att bestämma om en geodet skär sig själv räcker det p g a rotationssymmetri att betrakta räta linjer i planet som är vinkelräta mot x-axeln. Om linjen ligger helt i vinkelfältet, så finns det inga skärningspunkter. Om linjen skär däremot strålen som gör en vinkel $\pi/\sqrt{1+a^2}$ med den positiva x-axeln, så har skärningspunkten med strålen med vinkel $-\pi/\sqrt{1+a^2}$ samma bild på konen. Det finns alltså självskärningspunkter om $\sqrt{1+a^2}>2$ eller $a>\sqrt{3}$.

5. **Låt $\mathbf{x}\colon U \to S$ vara en lokal parametrisering av en orienterbar yta S.**
   a) **Visa att storheten $\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{vv}\rangle - \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{uv}\rangle$ tillhör ytans inre geometri, d v s kan uttryckas som funktion av första fundamentalformens koefficienter och dess derivator.**
   b) **Visa att produkten $(EG-F^2)^2K = (EG-F^2)(eg-f^2)$ kan skrivas som differensen**

$$\begin{vmatrix} E & F & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F & G & \frac{1}{2}G_v \\ \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v & F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2}E_v \\ F & G & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & 0 \end{vmatrix}$$

   av två determinanter med element i ytans inre geometri.

Derivation av första fundamentalformens koefficienter ger

$$E_{vv} = \frac{\partial}{\partial v}(2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv}\rangle) = 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{uv}\rangle + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uvv}\rangle$$

$$F_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}(\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v\rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv}\rangle) = \langle \mathbf{x}_{uuv}, \mathbf{x}_v\rangle + \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{uv}\rangle + \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{vv}\rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uvv}\rangle$$

$$G_{uu} = \frac{\partial}{\partial u}(2\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv}\rangle) = 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{uv}\rangle + 2\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uuv}\rangle$$

Elimination av $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uvv}\rangle$ och $\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uuv}\rangle$ ger

$$2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu} = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{vv}\rangle - \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{uv}\rangle\ .$$

Enligt definition av andra fundamentalforms koefficienter är

$$\begin{aligned}\sqrt{EG-F^2}\, e &= \det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu})\\ \sqrt{EG-F^2}\, f &= \det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv})\\ \sqrt{EG-F^2}\, g &= \det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv})\end{aligned}$$

Detta ger

$$(EG-F^2)(eg-f^2) = \det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu})\det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv}) - \det((\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv}))^2\ .$$

Observera att for en matris R med rader r_i och K med kolonner k_j är elementet på plats (i,j) i matrisen RK lika med $\langle r_i, k_j\rangle$. Så

$$\begin{aligned}&\det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu})\det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv}) - \det((\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv}))^2\\ &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u\rangle & \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle & \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv}\rangle \\ \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u\rangle & \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v\rangle & \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv}\rangle \\ \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u\rangle & \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v\rangle & \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{vv}\rangle \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u\rangle & \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle & \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv}\rangle \\ \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u\rangle & \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v\rangle & \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv}\rangle \\ \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u\rangle & \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v\rangle & \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{uv}\rangle \end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} E & F & F_v - \frac12 G_u \\ F & G & \frac12 G_v \\ \frac12 E_u & F_u - \frac12 E_v & \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{vv}\rangle \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & F & \frac12 E_v \\ F & G & \frac12 G_u \\ \frac12 E_v & \frac12 G_u & \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{uv}\rangle \end{vmatrix}\ .\end{aligned}$$

Då underdetrminanterna till position $(3,3)$ i de båda erhållna determinanter är lika kan differensen skrivas

$$\begin{vmatrix} E & F & F_v - \frac12 G_u \\ F & G & \frac12 G_v \\ \frac12 E_u & F_u - \frac12 E_v & \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{vv}\rangle - \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{uv}\rangle \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & F & \frac12 E_v \\ F & G & \frac12 G_u \\ \frac12 E_v & \frac12 G_u & 0 \end{vmatrix}$$

som med del a) ger den önskade ekvationen.

6. a) Beräkna Gaußkrökningen

i) för skruvytan S_1: $(x,y,z) = (u\cos v, u\sin v, v)$,

ii) för rotationsytan S_2: $(x,y,z) = (s\cos t, s\sin t, \log s)$.

b) Visa att S_1 och S_2 är inte lokalt isometriska.

i) Med $\mathbf{x}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (\cos v, \sin v, 0)\\ \mathbf{x}_v &= (-u\sin v, u\cos v, 1)\\ \mathbf{x}_{uu} &= (0,0,0)\\ \mathbf{x}_{uv} &= (-\sin v, \cos v, 0)\\ \mathbf{x}_{vv} &= (-u\cos v, -u\sin v, 0)\end{aligned}$$

och $E = 1$, $F = 0$, $G = 1 + u^2$, $e = 0$, $f = -1/\sqrt{EG - F^2}$. Detta ger

$$K = -\frac{1}{(1+u^2)^2} \ .$$

ii) Med $\mathbf{x}(s,t) = (s\cos t, s\sin t, \log s)$ får vi

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_s &= (\cos t, \sin t, \frac{1}{s}) \\
\mathbf{x}_t &= (-s\sin t, s\cos t, 0) \\
\mathbf{x}_{ss} &= (0, 0, -\frac{1}{s^2}) \\
\mathbf{x}_{st} &= (-\sin t, \cos t, 0) \\
\mathbf{x}_{tt} &= (-s\cos t, -s\sin t, 0)
\end{aligned}$$

och $E = (1+s^2)/(s^2)$, $F = 0$, $G = s^2$, $e = -1/s\sqrt{1+s^2}$, $f = 0$ och $g = s/\sqrt{1+s^2}$. Detta ger

$$K = -\frac{1}{(1+s^2)^2} \ .$$

b) Gaußkrökningen är samma, men ytorna är ej lokalt isometriska. Antag motsatsen och att s och t är funktioner av u och v. Ur $K(s,t) = K(u,v)$ följer att $s^2 = u^2$, så $s = \pm u$, $t = \varphi(u,v)$. Då är $\mathbf{x}_u = \pm\mathbf{x}_s + \varphi_u \mathbf{x}_t$, $\mathbf{x}_v = \varphi_v \mathbf{x}_t$ och $1 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = (1 + 1/u^2) + \varphi_u^2 u^2$, $0 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \varphi_u \varphi_v u^2$ och $1 + u^2 = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \varphi_v^2 u^2$. Om $\varphi_v \equiv 0$ beror t bara på u, så $\varphi_u u \equiv 0$. Men det strider mot $1 = 1 + (1/u^2) + \varphi_u^2 u^2$.