

### Tentamensskrivning i MAN500, Differentialgeometri

1. a) Härled, under lämplig förutsättning, Frenets ekvationer för en båglängdsparametriserad kurva i  $\mathbb{R}^3$ .  
b) Uttryck krökningen och torsionen av en godtycklig reguljär parametriserad kurva  $\alpha$  med hjälp av storheterna  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  och  $\alpha'''$ .
2. Låt  $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$  vara en kontinuerlig avbildning från en reguljär yta  $S_1$  till en reguljär yta  $S_2$ . När sägs  $\varphi$  vara differentierbar i punkten  $p \in S_1$ ? Visa att definitionen inte beror på val av lokala parametriseringen.
3. Ange de asymptotiska kurvorna till funktionsytan  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$ . Bestäm i varje punkt principalriktningarna. Bonuspoäng för beräkning av krökningslinjerna.

4. Betrakta konen

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = a^2(x^2 + y^2), z > 0\},$$

där  $a \in \mathbb{R}_+$ . Beskriv geodeterna på ytan. För vilka värden av  $a$  finns det geodeter som skär sig själva?

5. Låt  $\mathbf{x}: U \rightarrow S$  vara en lokal parametrisering av en orienterbar yta  $S$ .  
a) Visa att storheten  $\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{vv} \rangle - \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{uv} \rangle$  tillhör ytans inre geometri, d v s kan uttryckas som funktion av första fundamentalformens koefficienter och dess derivator.  
b) Visa att produkten  $(EG - F^2)^2 K = (EG - F^2)(eg - f^2)$  kan skrivas som differensen

$$\begin{vmatrix} E & F & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F & G & \frac{1}{2}G_v \\ \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v & F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2}E_v \\ F & G & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & 0 \end{vmatrix}$$

av två determinanter med element i ytans inre geometri.

6. a) Beräkna Gaußkrökningen  
i) för skruvytan  $S_1: (x, y, z) = (u \cos v, u \sin v, v)$ ,  
ii) för rotationsytan  $S_2: (x, y, z) = (s \cos t, s \sin t, \log s)$ .  
b) Visa att  $S_1$  och  $S_2$  är inte lokalt isometriska. (5p).

Varje uppgift (utom en) ger maximalt 4 poäng. För godkänd skrivning krävs minst 12 poäng. För väl godkänd krävs minst 18 poäng (utan bonuspoäng).

Tentan räknas vara färdigrättad fredagen den 4 april. Tentor kan hämtas i mottagningsrummet kl 12.30–13.00 varje vardag. Tentamensresultat lämnas ut på telefon 772 5388.

Lycka till!

Jan Stevens