MATEMATIK js
Göteborgs universitet

Lösningar till tentamensskrivningen
MAN500, Differentialgeometri, 20040320

1. Betrakta kurvan $\alpha(t) = (t^2, 1 - t^2, t^2 - t)$, $t \in \mathbb{R}$.
a) Bestäm Frenets treben i den punkt där kurvans krökning är maximal.
b) Bestäm kurvans parameterframställning i det koordinatsystem där basvektorerna är Frenets treben svarande mot maximal krökning.

Vi har $\alpha(t) = (t^2, 1 - t^2, t^2 - t)$, $\alpha'(t) = (2t, -2t, 2t)$ och $\alpha''(t) = (2, -2, 2)$. Kurvan är ej båglängdparametriserad, så krökningen ges av formeln $\frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3}$. Vi beräknar $\alpha' \wedge \alpha'' = (-2, -2, 0)$. Krökningen är maximal om $|\alpha'|^3$ är minimal, d v s om $12t^2 - 4t + 1$ är minimal och detta är när $24t - 4 = 0$, $t = \frac{1}{6}$. Då är $\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$, $\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0)$ (som enhetsvektor i riktning $\alpha' \wedge \alpha''$) och $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$.
Basbytet ges av en ortogonal matris, så inversen är transponatet. Vi får de nya koordinater (ξ, η, ζ) enligt

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{\sqrt{6}}(x - y - 2z)\\ \eta &= \frac{1}{\sqrt{3}}(x - y + z)\\ \zeta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-x - y)\end{aligned}$$

och kurvan blir $(\xi, \eta, \zeta) = (\frac{1}{\sqrt{6}}(2t-1), \frac{1}{\sqrt{3}}(3t^2 - t - 1), -\frac{1}{\sqrt{2}}) = (\frac{1}{\sqrt{6}}(2(t - \frac{1}{6}) - \frac{2}{3}), \frac{1}{\sqrt{3}}(3(t - \frac{1}{6})^2 - \frac{13}{12}), -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Om vi flyttar origon till $\alpha(\frac{1}{6})$ och tar $\tau = t - \frac{1}{6}$ som ny variabel får vi kurvan $(\frac{2}{\sqrt{6}}\tau, \sqrt{3}\tau^2, 0)$.

2. Visa den isoperimetriska olikheten: för en enkel, sluten, reguljär plan kurva C med längd l som omsluter ett område med area A gäller att $l^2 \geq 4\pi A$.

Se kursboken, S. 34.

3. Låt $f\colon S \to \mathbb{R}$ vara en funktion på en reguljär yta i $\mathbb{R}^3$. Visa att f är differentierbar i en punkt $p \in S$ om och endast om det finns en i $p \in \mathbb{R}^3$ differentierbar funktion $\bar{f}$, definierad på en omgivning V av p i $\mathbb{R}^3$, så att $f(q) = \bar{f}(q)$ för alla $q \in V \cap S$.

Funktionen f är differentierbar i punkten $p \in S$ om det finns parametriseringar $\mathbf{x}\colon U \to S$ så att sammansättningen $f \circ \mathbf{x}\colon U \to \mathbb{R}$ är differentierbar i $\mathbf{x}^{-1}(p) \in U$. Detta gäller då för alla parametriseringar. Speciellt kan vi välja en grafparametrisering på formen $(x, y, z) = (x, y, g(x, y))$ (efter eventuell omordning av koordinaterna). Vi definierar nu $\bar{f}$ på $V = U \times \mathbb{R}$ genom $\bar{f}(x, y, z) = f(x, y)$, som är uppenbarligen en differentierbar funktion. Omvänt, given $\bar{f}$, så är $f(x, y) = \bar{f}(x, y, g(x, y))$ en differentierbar funktion av två variabler som sammansättning av differentierbara funktioner.

4. a) Låt S vara funktionsytan $z = xy^2$. Bestäm Gaußkrökning och medelkrökning. Vilka punkter på ytan är elliptiska, hyperboliska, paraboliska, respektive plana? Finns det några navelpunkter?
b) Bestäm de asymptotiska linjerna på ytan.

Sätt $\mathbf{x}(u,v) = (u, v, uv^2)$. Då är

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u &= (1, 0, v^2) \\
\mathbf{x}_v &= (0, 1, 2uv) \\
\mathbf{x}_{uu} &= (0, 0, 0) \\
\mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, 2v) \\
\mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, 2u)
\end{aligned}$$

Detta ger $E = 1+v^4$, $F = 2uv^3$ och $G = 1+4u^2v^2$. Därmed är $EG-F^2 = 1+v^4+4u^2v^2$. Vi får $e = 0$, $f = 2v/\sqrt{1+v^4+4u^2v^2}$ och $g = 2u/\sqrt{1+v^4+4u^2v^2}$. Gaußkrökningen är $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{-4v^2}{(1+v^4+4u^2v^2)^2} \le 0$.
Medelkrökningen är halva spåret till

$$-dN = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+v^4+4u^2v^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -4uv^4 & 2v+4u^2v^3 \\ 2v+2v^5 & 2u-2uv^4 \end{pmatrix} .$$

Så $H = \frac{u(1-3v^4)}{(1+v^4+4u^2v^2)^{\frac{3}{2}}}$. Det finns inga elliptiska punkter, ty $K \le 0$. Alla punkter med $K < 0$, d v s $v \neq 0$ är hyperboliska. Om $v = 0$ då $H = u$, så $u \neq 0$ ger paraboliska punkter, medan $u = v = 0$ är en plan punkt. Den plana punkten är navelpunkt. Andra navelpunkter finns inte, ty i en navelpunkt är $K = H^2 \ge 0$.
Differentialekvationen för asymptotiska kurvor är $e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2$. Insättning och multiplikation med rotfaktorn ger $4vu'v' + 2uv'^2 = 0$, så $v' = 0$ eller $2vu' = -uv'$ som ger diffekvationen $2\frac{du}{u} = -\frac{dv}{v}$. De asymptotototiska kurvorna är kurvorna $v = \mathrm{konst}$ och $u^2v = \mathrm{konst}$.

5. a) Visa att en geodet på en yta, som är också krökningslinje, är en plan kurva.
b) Visa att en (ej rättlinjig) geodet på en yta, som ligger i ett plan, är en krökningslinje.

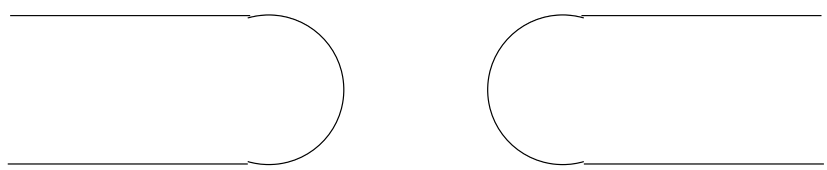
Om α är geodet och krökningslinje, ligger α i ett plan med normalvektor $N \wedge \alpha'$, där N är ytans normal. Detta är en nollskild konstant vektor, ty $(N \wedge \alpha')' = N' \wedge \alpha' + N \wedge \alpha'' = 0$, där villkoret krökningslinje ger att N' och α' är linjärt beroende, medan geodet betyder att α'' är en multipel av N. Nu gäller $\langle \alpha, N \wedge \alpha' \rangle' = \langle \alpha', N \wedge \alpha' \rangle = 0$ så kurvan ligger i ett plan $\langle \alpha, N \wedge \alpha' \rangle = \mathrm{konst}$.
Om kurvan är en geodet är α'' en multipel av N. Så om $\alpha'' \neq 0$ ligger N i kurvans plan, och N' ligger i samma plan. Eftersom N' är vinkelrät mot N måste N' vara en multipel av α'. Så kurvan är krökningslinje.

6. Diskutera hur geodeterna ser ut på rotationsytan $M \subset \mathbb{R}^3$, där M är

$$\begin{aligned} M = \{(x,y,z) \mid z = 1,\ x^2+y^2 \ge 1\} \\ \cup \{(x,y,z) \mid z = -1,\ x^2+y^2 \ge 1\} \\ \cup \{(x,y,z) \mid |z| \le 1,\ x^2+y^2 = \varphi(z)\} , \end{aligned}$$

med $\varphi(1) = \varphi(-1) = 1$ och $\varphi(z)$ sådant att M är en glatt reguljär yta.

Ytan består av två parallella plan med ett hål. Det enklaste sättet att fylla hålet är följande,



där snittet med (y, z)-planet är ritat. I planen är geodeter räta linjer. Vidare är varje meridian (som ritad) geodet. En parallell är bara geodet om $\varphi'(z) = 0$. I det ritade fallet finns det bara en sådan parallell.
I planen finns räta linjer som missar hålet. Meridianer skär randcirkeln vinkelrät och går genom hålet. Frågan är vad som händer med linjer som har en annan infallsvinkel. Ur Clairauts relation $r \cos \vartheta = \mathrm{konst}$ följer att det finns en vinkel ϑ_0 så att geodeten kommer upp igen ur hålet om $\vartheta < \vartheta_0$, medan om $\vartheta > \vartheta_0$ så går den genom hålet och slutar som rät linje i det andra planet. För $\vartheta = \vartheta_0$ kan den minsta parallellen, som är geodet, inte vara tangent, så geodeten har parallellen som limitcykel, och fångas således i hålet.