MATEMATIK
Göteborgs universitet

Datum: 040320
Klockan: 8.45–13.45
Hjälpmedel: Inga
Telefon: 0740-350646,
Robert Berman

Tentamensskrivning i MAN500, Differentialgeometri

1. Betrakta kurvan $\alpha(t) = (t^2, 1-t^2, t^2-t)$, $t \in \mathbb{R}$.
a) Bestäm Frenets treben i den punkt där kurvans krökning är maximal.
b) Bestäm kurvans parameterframställning i det koordinatsystem där basvektorerna är Frenets treben svarande mot maximal krökning.

2. Visa den isoperimetriska olikheten: för en enkel, sluten, reguljär plan kurva C med längd l som omsluter ett område med area A gäller att $l^2 \geq 4\pi A$.

3. Låt $f\colon S \to \mathbb{R}$ vara en funktion på en reguljär yta i $\mathbb{R}^3$. Visa att f är differentierbar i en punkt $p \in S$ om och endast om det finns en i $p \in \mathbb{R}^3$ differentierbar funktion $\bar{f}$, definierad på en omgivning V av p i $\mathbb{R}^3$, så att $f(q) = \bar{f}(q)$ för alla $q \in V \cap S$.

4. a) Låt S vara funktionsytan $z = xy^2$. Bestäm Gaußkrökning och medelkrökning. Vilka punkter på ytan är elliptiska, hyperboliska, paraboliska, respektive plana? Finns det några navelpunkter?
b) Bestäm de asymptotiska linjerna på ytan.

5. a) Visa att en geodet på en yta, som är också krökningslinje, är en plan kurva.
b) Visa att en (ej rättlinjig) geodet på en yta, som ligger i ett plan, är en krökningslinje.

6. Diskutera hur geodeterna ser ut på rotationsytan $M \subset \mathbb{R}^3$, där M är

$$
\begin{aligned}
M = \{(x,y,z) \mid z = 1,\ x^2+y^2 \geq 1\} \\
\cup \{(x,y,z) \mid z = -1,\ x^2+y^2 \geq 1\} \\
\cup \{(x,y,z) \mid |z| \leq 1,\ x^2+y^2 = \varphi(z)\}\ ,
\end{aligned}
$$

med $\varphi(1) = \varphi(-1) = 1$ och $\varphi(z)$ sådant att M är en glatt reguljär yta. (5p).

Varje uppgift (utom en) ger maximalt 4 poäng. För godkänd skrivning krävs minst 12 poäng. För väl godkänd krävs minst 18 poäng (utan bonuspoäng).
Tentan räknas vara färdigrättad fredagen den 2 april. Tentor kan hämtas i mottagningsrummet kl 12.30–13.00 varje vardag.
Lycka till!

Jan Stevens