Lösningar till tentamensskrivningen
MAN500, Differentialgeometri, 20050317

1. a) **Definiera vad som menas med normalkrökningen av en kurva på en reguljär orienterad yta.**
   b) **Visa att alla kurvor som ligger på en reguljär yta och som går genom en fix punkt på ytan och där har gemensam tangent, har samma normalkrökning.**

   Låt γ vara båglängdsparametriserad. Kurvans krökning fås från γ''. Komponenten i ytnormalens riktning kallas för normalkrökning: $\kappa_n = \gamma'' \cdot N$.
   Eftersom $\gamma'' = (\sigma_u u' + \sigma_v v')' = \sigma_u u'' + \sigma_v v'' + \sigma_{uu}(u')^2 + 2\sigma_{uv}u'v' + \sigma_{vv}(v')^2$ är $\kappa_n = \gamma'' \cdot N = L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2$, där L, M och N är koefficienterna i andra fundamentalformen. Normalkrökningen beror bara på tangentvektorn och därför har alla kurvor som har gemensam tangent, samma normalkrökning.

2. **Visa fyrvertexsatsen: på en enkel sluten konvex reguljär plan kurva C är $\kappa_s' = 0$ i minst fyra punkter.**

   Om funktionen κ_s är ej konstant, antar den maximi- och minimivärdet, säg i P och Q. Antag nu att P och Q är de enda vertex. Sträckan PQ, som vi kan anta ligger på x-axeln, delar kurvan i två delar. På den ena är $\kappa_s' > 0$, på den andra $\kappa_s' < 0$; vi kan anta att $y < 0$ där. Då är $\int_C y\kappa_s' ds > 0$. Å andra sidan ger partialintegration

$$\int_C y\kappa_s' ds = -\int_C y'\kappa_s ds = \int_C x'' ds = 0 \ ,$$

   eftersom $t' = \kappa_s n$, där $t = \binom{x'}{y'}$ och $n = \binom{-y'}{x'}$. Motsägelsen visar att det finns en teckenväxling till för κ_s'. Om det finns tre teckenväxlinger, så finns det fyra.

3. **Rotationsytan till kedjelinjen kan parametriseras med**

$$\sigma(u, v) = \left(\tfrac{1+u^2}{2u}\cos v, \tfrac{1+u^2}{2u}\sin v, \log u\right) \ .$$

   Visa att ytan är en minimalyta.

   Vi beräknar

$$\begin{aligned}
\sigma_u &= \left(\tfrac{u^2-1}{2u^2}\cos v, \tfrac{u^2-1}{2u^2}\sin v, \tfrac{1}{u}\right)\\
\sigma_v &= \left(-\tfrac{1+u^2}{2u}\sin v, \tfrac{1+u^2}{2u}\cos v, 0\right)\\
\sigma_{uu} &= \left(\tfrac{1}{u^3}\cos v, \tfrac{1}{u^3}\sin v, \tfrac{-1}{u^2}\right)\\
\sigma_{uv} &= \left(-\tfrac{u^2-1}{2u^2}\sin v, \tfrac{u^2-1}{2u^2}\cos v, 0\right)\\
\sigma_{vv} &= \left(-\tfrac{1+u^2}{2u}\cos v, -\tfrac{1+u^2}{2u}\sin v, 0\right)
\end{aligned}$$

   Detta ger $E = (\frac{u^2+1}{2u^2})^2$, $F = 0$, $G = (\frac{u^2+1}{2u})^2$, $L = -\frac{1}{u^2}$, $M = 0$ och $N = 1$. Så $H = \frac{L}{E} + \frac{N}{G} = 0$.

4. a) Betrakta avbildningen $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\sigma(u,v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$, vars bild är en torus i $\mathbb{R}^4$. Beräkna $E = \sigma_u \cdot \sigma_u$, $F = \sigma_u \cdot \sigma_v$ och $G = \sigma_v \cdot \sigma_v$, och visa att Gaußkrökningen K är noll i varje punkt.

b) Visa att man inte kan lägga en torus i $\mathbb{R}^3$ så att Gaußkrökningen K är noll i varje punkt.

a) Vi har $\sigma_u = (-\sin u, \cos u, 0, 0)$ och $\sigma_v = (0, 0, -\sin v, \cos v)$, så $E = 1$, $F = 0$ och $G = 1$. Torusen är isometrisk med planet, så $K = 0$.
b) En kompakt yta i $\mathbb{R}^3$ har minst en punkt där Gaußkrökningen är strängt positiv.

5. Låt $\gamma\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^3$ en reguljär båglängdsparametriserad kurva med krökning $\kappa(s) \neq 0$ för alla $s \in (\alpha,\beta)$. Regelytan

$$\sigma(s,v) = \gamma(s) + v b(s), \qquad (s,v) \in (\alpha,\beta) \times \mathbb{R} \,,$$

där $b(s)$ är kurvans binormal, kallas binormalytan till kurvan γ.

a) Visa att parametriseringen är reguljär i varje punkt.

b) Beräkna Gaußkrökningen K.

c) Visa att kurvan γ är en geodet på sin binormalyta. (5p).

a) Låt (t,n,b) vara Frenets trieder. Vi har $\sigma_s = \gamma' + vb' = t - v\tau n$, $\sigma_v = b$, så $\sigma_s \times \sigma_v = t \times b - v\tau n \times b = -n - v\tau t$, med längd $\sqrt{1 + v^2\tau^2} \neq 0$. Därför är parametriseringen reguljär.
b) Från ovanstående får vi $E = 1 + v^2\tau^2$, $F = 0$ och $G = 1$. Eftersom $\sigma_{vv} = 0$ är $N = 0$ och $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{-M^2}{EG}$. Ur $\sigma_{sv} = -\tau n$ får vi $\det(\sigma_s, \sigma_v, \sigma_{sv}) = \det(t - v\tau n, b, -\tau n) = \tau$ och $M = \tau/\sqrt{1 + v^2\tau^2}$. Därmed är $K = -\tau^2/(1 + v^2\tau^2)^2$.
c) På kurvan γ gäller $v = 0$, så ytans normal är $-n$ och $\gamma'' = t' = \kappa n$ har samma riktning. Därför är γ en geodet.

6. Betrakta kartan för Möbiusbandet

$$\sigma(t,\vartheta) = ((1 - t\sin\tfrac{\vartheta}{2})\cos\vartheta, (1 - t\sin\tfrac{\vartheta}{2})\sin\vartheta, t\cos\tfrac{\vartheta}{2}) \,,$$

definerad på $U = \{(t,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2},\ \ 0 < \vartheta < 2\pi\}$.

a) Beräkna första fundamentalformen.

b) Visa att avbildningen $f\colon U \to U$, $f(t,\vartheta) = (-t, 2\pi - \vartheta)$, inducerar en avbildning av Möbiusbandet på sig själv, som är en diffeomeorfism. Är den en isometri? (motivera ditt svar).

a) Ur $\sigma_t = (-\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\vartheta, -\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\vartheta, \cos\frac{\vartheta}{2})$, $\sigma_\vartheta = (-(1-t\sin\frac{\vartheta}{2})\sin\vartheta - \frac{t}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\vartheta, (1 - t\sin\frac{\vartheta}{2})\cos\vartheta - \frac{t}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\vartheta, -\frac{t}{2}\sin\frac{\vartheta}{2})$ får vi $E = 1$, $F = 0$ och $G = (1 - t\sin\frac{\vartheta}{2})^2 + \frac{t^2}{4}$.
b) Eftersom f är en diffeomorfism av U får vi en diffeomorfism av $\sigma(U)$. För att se att den kan utvidgas över hela ytan tittar vi i en annan karta $\widetilde{U}$, där $-\pi < \vartheta < \pi$. Vi har $\sigma(f(t,\vartheta)) = ((1 + t\sin(\pi - \frac{\vartheta}{2}))\cos(2\pi - \vartheta), (1 + t\sin(\pi - \frac{\vartheta}{2}))\sin(2\pi - \vartheta), -t\cos(\pi - \frac{\vartheta}{2})) = ((1 + t\sin\frac{\vartheta}{2})\cos\vartheta, -(1 + t\sin\frac{\vartheta}{2})\sin\vartheta, t\cos\frac{\vartheta}{2}) = ((1 - t\sin(-\frac{\vartheta}{2}))\cos(-\vartheta), (1 - t\sin(-\frac{\vartheta}{2}))\sin(-\vartheta), t\cos(-\frac{\vartheta}{2}))$. På $\widetilde{U}$ har vi avbildningen $\widetilde{f}(t,\vartheta) = (t, -\vartheta)$. Avbildningen är ej en isometri, ty första fundamentalformen bevaras ej.