MATEMATIK
Göteborgs universitet

Datum: 050317
Klockan: 8.30–13.30
Hjälpmedel: Inga
Telefon: 076-2186654,
Johanna Pejlare

Tentamensskrivning i MAN500, Differentialgeometri

1. a) Definiera vad som menas med normalkrökningen av en kurva på en reguljär orienterad yta.
b) Visa att alla kurvor som ligger på en reguljär yta och som går genom en fix punkt på ytan och där har gemensam tangent, har samma normalkrökning.

2. Visa fyrvertexsatsen: på en enkel sluten konvex reguljär plan kurva C är $\kappa_s' = 0$ i minst fyra punkter.

3. Rotationsytan till kedjelinjen kan parametriseras med

$$\sigma(u,v) = \left(\tfrac{1+u^2}{2u}\cos v, \tfrac{1+u^2}{2u}\sin v, \log u\right) .$$

Visa att ytan är en minimalyta.

4. a) Betrakta avbildningen $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\sigma(u,v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$, vars bild är en torus i $\mathbb{R}^4$. Beräkna $E = \sigma_u \cdot \sigma_u$, $F = \sigma_u \cdot \sigma_v$ och $G = \sigma_v \cdot \sigma_v$, och visa att Gaußkrökningen K är noll i varje punkt.
b) Visa att man inte kan lägga en torus i $\mathbb{R}^3$ så att Gaußkrökningen K är noll i varje punkt.

5. Låt $\gamma\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^3$ en reguljär båglängdsparametriserad kurva med krökning $\kappa(s) \neq 0$ för alla $s \in (\alpha,\beta)$. Regelytan

$$\sigma(s,v) = \gamma(s) + v b(s), \qquad (s,v) \in (\alpha,\beta) \times \mathbb{R} ,$$

där $b(s)$ är kurvans binormal, kallas binormalytan till kurvan γ.
a) Visa att parametriseringen är reguljär i varje punkt.
b) Beräkna Gaußkrökningen K.
c) Visa att kurvan γ är en geodet på sin binormalyta. (5p).

6. Betrakta kartan för Möbiusbandet

$$\sigma(t,\vartheta) = \left((1 - t\sin\tfrac{\vartheta}{2})\cos\vartheta, (1 - t\sin\tfrac{\vartheta}{2})\sin\vartheta, t\cos\tfrac{\vartheta}{2}\right) ,$$

definerad på $U = \{(t,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2},\ 0 < \vartheta < 2\pi\}$.
a) Beräkna första fundamentalformen.
b) Visa att avbildningen $f\colon U \to U$, $f(t,\vartheta) = (-t, 2\pi - \vartheta)$, inducerar en avbildning av Möbiusbandet på sig själv, som är en diffeomeorfism. Är den en isometri? (motivera ditt svar).

Varje uppgift (utom en) ger maximalt 4 poäng. För godkänd skrivning krävs minst 12 poäng. För väl godkänd krävs minst 18 poäng (utan bonuspoäng).
Tentan räknas vara färdigrättad fredagen den 1 april. Tentor kan hämtas i mottagningsrummet kl 12.30–13.00 varje vardag.
Lycka till!

Jan Stevens