Lösningar till tentamensskrivningen
MAN500, Differentialgeometri, 20060323

1. **Beräkna krökning och torsion för Vivianis kurva**

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (1+\cos t, \sin t, 2\sin\tfrac{1}{2}t)\ .$$

Vi beräknar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}'(t) &= (-\sin t, \cos t, \cos\tfrac{1}{2}t)\ ,\\ \boldsymbol{\gamma}''(t) &= (-\cos t, -\sin t, -\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}t)\ ,\\ \boldsymbol{\gamma}'''(t) &= (\sin t, -\cos t, -\tfrac{1}{4}\cos\tfrac{1}{2}t)\ .\end{aligned}$$

Då är $\|\boldsymbol{\gamma}'\|^2 = 1+\cos^2\frac{1}{2}t = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos t$,
$\boldsymbol{\gamma}'\times\boldsymbol{\gamma}'' = (-\frac{1}{2}\cos t\sin\frac{1}{2}t+\sin t\cos\frac{1}{2}t, -\cos t\cos\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\sin t\sin\frac{1}{2}t, 1)$,
$\|\boldsymbol{\gamma}'\times\boldsymbol{\gamma}''\|^2 = \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{2}t+\cos^2\frac{1}{2}t+1 = \frac{3}{8}\cos t+\frac{13}{8}$ och $\det(\boldsymbol{\gamma}',\boldsymbol{\gamma}'',\boldsymbol{\gamma}''') = \frac{3}{4}\cos\frac{1}{2}t$.
Detta ger $\kappa = \sqrt{13+3\cos t}/(3+\cos t)^{\frac{3}{2}}$ och $\tau = 6\cos\frac{1}{2}t/(13+3\cos t)$.

2. **Visa den isoperimetriska olikheten för en enkel sluten reguljär i planet (Wirtingers lemmas får antas).**

Se stencil.

3. **Definiera vad som menas med tangentrummet till en reguljär yta och visa att det är ett linjärt rum av dimension 2.**

Se kursboken S 74.

4. **Betrakta ytan $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2y-xz+z=0\}$ med parametrisering**

$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = (u,(u-1)v,u^2v)\ .$$

a) Visa att S är en reguljär yta.
b) Beräkna principalkrökningar och principalriktningar i punkten $(1,0,0)$.

Gradienten till den definierende funktion är $(2xy-z, x^2, -x+1)$, som är aldrig noll. Därför är S reguljär. Vi beräknar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_u &= (1,v,2uv)\\ \boldsymbol{\sigma}_v &= (0,u-1,u^2)\\ \boldsymbol{\sigma}_{uu} &= (0,0,2v)\\ \boldsymbol{\sigma}_{uv} &= (0,1,2u)\\ \boldsymbol{\sigma}_{vv} &= (0,0,0)\end{aligned}$$

Detta ger i $(u,v)=(1,0)$ att $E=1$, $F=0$, $G=1$, $L=N=0$ och $M=-1$. Så principalkrökningar är 1 och -1 med principalriktnigar $\boldsymbol{\sigma}_u-\boldsymbol{\sigma}_v=(1,0,-1)$ och $\boldsymbol{\sigma}_u+\boldsymbol{\sigma}_v=(1,0,1)$.

5. **Visa att Ennepers yta**

$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = (u - \tfrac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \tfrac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2)$$

är en minimalyta.

Vi beräknar

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_u &= (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u)\\
\boldsymbol{\sigma}_v &= (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)\\
\boldsymbol{\sigma}_{uu} &= (-2u, 2v, u)\\
\boldsymbol{\sigma}_{uv} &= (2v, 2u, 0)\\
\boldsymbol{\sigma}_{vv} &= (2u, -2v, -2)
\end{aligned}$$

Detta ger $E = G = (1 + u^2 + v^2)^2$, $F = 0$, $G = (\frac{u^2+1}{2u})^2$, $L = 1$, $M = 0$ och $N = -1$. Så $H = \frac{L}{E} + \frac{N}{G} = 0$. Man behöver inte beräkna L och N, det räcker att konstatera att $\boldsymbol{\sigma}_{uu} = -\boldsymbol{\sigma}_{vv}$.

6. **Beskriv geodeterna på en torus.**

Se kursboken S 312.