

Övningsexempel i Fourieranalys 2003

1. Funktionen $f(x)$ är 2-periodisk, och $f(x) = (x + 1)^2$ för $-1 < x < 1$. Utveckla $f(x)$ i komplex trigonometrisk Fourierserie. Sök en 2-periodisk lösning till ekvationen

$$2y'' - y' - y = f(x).$$

2. Funktionen $f(t)$ är 3-periodisk, och

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{för } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{för } 1 < t < 2, \\ 3 - t & \text{för } 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Bestäm, i form av en trigonometrisk Fourierserie, en periodisk lösning till differentialekvationen

$$y'' + 3y = f(t).$$

3. Utveckla funktionen $\cos x$ i sinusserie på intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$. Använd resultatet för att beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}.$$

4. Låt $f(t) = 1 - t^2$ för $|t| \leq 1$ och låt f vara 2-periodisk. Bestäm en begränsad lösning till

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, -\infty < x < \infty, \\ u(0, t) = f(t), & -\infty < t < \infty. \end{cases}$$

5. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0$ i cirkelringen $1 < r < 2$ (polära koordinater) med randvillkoren $u(1, \theta) = 0$, $u(2, \theta) = f(\theta)$, där $f(\theta)$ är 2π -periodisk, och

$$f(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2} \quad \text{för } |\theta| \leq \pi.$$

6. Fouriertransformera

a) $\frac{t}{(t^2 + a^2)^2}$, b) $\frac{1}{(t^2 + a^2)^2}$, c) $\frac{t}{(t^2 + 1)(t^2 + 2t + 5)}$,
d) $e^{-a|t|} \sin bt$ ($a > 0, b > 0$).

7. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega) = \frac{\omega}{1 + \omega^4}$. Beräkna

a) $\int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt$, b) $f'(0)$.

8. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\frac{1 - i\omega}{1 + i\omega} \frac{\sin \omega}{\omega}$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

9. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx$ med hjälp av Fouriertransform.

10. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\frac{1}{|\omega|^3 + 1}$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} |f * f'|^2 dt$, där $*$ betyder faltning.

11. Ange Fouriertransformen till functionen

$$f(t) = \int_0^2 \frac{\sqrt{\omega}}{1 + \omega} e^{i\omega t} d\omega.$$

Beräkna a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos t dt$, b) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

12. Låt $f(t) = \int_0^1 \sqrt{\omega} e^{\omega^2} \cos \omega t d\omega$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt$.

13. Bestäm en lösning till ekvationen

$$u'(t) + 2u(t) + e^{-2t} \int_{-\infty}^t e^{2\tau} u(\tau) d\tau = \delta(t).$$

14. Lös integralekvationen

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau} u(t - \tau) d\tau - \int_{-\infty}^0 e^{\tau} u(t - \tau) d\tau = \sqrt{3}u(t) - e^{-|t|}.$$

15. Bestäm en lösning till ekvationen

$$u(t) + \int_{-\infty}^t e^{\tau-t} u(\tau) d\tau = e^{-2|t|}.$$

16. För ett linjärt, tidsinvariant system gäller att insignalen $\frac{1}{1+t^2}$ ger upphov till utsignalen $\frac{t}{(4+t^2)^2}$. Beräkna impulssvaret, svaret på $\cos \omega t$. Är systemet kausalt, stabilt?

17. Ett linjärt, tidsinvariant system har impulssvaret $h(t) = e^{-4t^2}$. Låt $y(t)$ vara svaret på insignalen e^{-t^2} . Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} e^{it} h(t) y(t) dt$.

18. För ett linjärt, tidsinvariant system gäller att insignalen $\frac{1}{4+t^2}$ ger upphov till utsignalen e^{-2t^2} . Beräkna utsignalen (i form av en komplex Fourierserie), då insignalen är impulståget

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [2\delta(t - 2n) - \delta(t - 2n - 1)].$$

19. Låt $x(n)$ vara N -periodisk, och

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{då } 0 \leq n \leq k-1, \\ 0, & \text{då } k \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

Beräkna den diskreta Fouriertransformen och använd Parsevals formel för att beräkna

$$\sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{1 - \cos \frac{2\pi\mu k}{N}}{1 - \cos \frac{2\pi\mu}{N}}.$$

20. Bestäm den diskreta Fouriertransformen till signalen (sekvensen) $x(n) = \sin \frac{n\pi}{N}$, $n = 0, \dots, N-1$, $x(n)$ N -periodisk.

21. Visa att funktionerna $\varphi_n(x) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\pi x} e^{inx}$ är parvis ortogonala i $L^2(\mathbf{R})$. Bestäm talen c_n så att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=-N}^N c_n \varphi_n(x) \right|^2 dx$$

minimeras.

22. Bestäm den lösning $y(x)$ till $y'' - y = 0$ som minimerar $\int_{-1}^1 [1+x-y(x)]^2 dx$.

23. Bestäm samtliga egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouville-problemet

$$\begin{cases} f'' + \lambda f = 0, & 0 < x < a, \\ f(0) - f'(0) = 0, & f(a) + 2f'(a) = 0. \end{cases}$$

24. Bestäm samtliga egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouville-problemet

$$\begin{cases} -e^{-4x} \frac{d}{dx} \left(e^{4x} \frac{du}{dx} \right) = \lambda u, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u'(1) = 0. \end{cases}$$

Utveckla funktionen e^{-2x} i Fourierserie m.a.p. egenfunktionerna.

25. Lös problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y, & 0 < x < 2, 0 < y < 1, \\ u(x, 0) = 0, & u(x, 1) = 0, \\ u(0, y) = y - y^3, & u(2, y) = 0. \end{cases}$$

26. Lös problemet

$$\begin{cases} \sqrt{1+t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = 1, & u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1 - x^2. \end{cases}$$

27. Lös problemet

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} + 20u = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u(0, y) = u(1, y) = 0, \\ u(x, 0) = 0, & u(x, 1) = x^2 - x. \end{cases}$$

28. Lös problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t \sin x, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin 2\pi x. \end{cases}$$

29. Lös problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = t + 1, \\ u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1 - x. \end{cases}$$

30. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, $1 < r < 2$, (polära koordinater i planet) med randvillkoren

$$\begin{cases} u = 0 \text{ för } r = 1, & u'_r = 0 \text{ för } r = 2, \\ u = 0 \text{ för } \theta = 0, & u = r - 1 \text{ för } \theta = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

31. Utveckla funktionen $\sin(2 \sin x)$ i trigonometrisk Fourierserie (reell form).

32. Ett cirkulärt membran med radie a påverkas av en periodisk yttre kraft $q \sin \omega t$ likformigt fördelad över membranet. För de transversella svängningarna har vi alltså ekvationen

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{q}{S} \sin \omega t, \quad u|_{r=a} = 0.$$

Bestäm den stationära svängningsrörelsen (dvs. en lösning av formen $u(r, t) = v(r) \sin \omega t$). Vilka är resonans(vinkel)frekvenserna?

33. Lös värmeledningsekvationen $u'_t = \Delta u \equiv \nabla^2 u$ i en cylinder med radien b . Ändytorna är isolerade, medan mantelytan $r = b$ (cylinderkoordinater) lyder avsvälningsslagen $u + 2u'_r = 0$. Begynnelsetemperaturen är $u|_{t=0} = r^2 = x^2 + y^2$.

34. a) Bestäm en begränsad lösning av formen $u(r, t) = v(r)e^{i\omega t}$ till ekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} u, & 0 < r < a, \\ u(a, t) = e^{i\omega t}, \end{cases}$$

där $n \geq 0$ är ett heltal. För vilka värden på $\omega > 0$ finns en sådan lösning?

b) Låt ω vara sådant att lösningen i a) existerar. Visa hur den kan användas för att lösa

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} u, & 0 < r < a, t > 0, \\ u(a, t) = \sin \omega t, & u \text{ begränsad,} \\ u(r, 0) = 0, & u_t(r, 0) = 0. \end{cases}$$

Eventuellt förekommande integraler behöver inte beräknas.

35. Lös Laplaces ekvation $\nabla^2 u = 0$ i cylindern $f = \sqrt{x^2 + y^2} < R$, $0 < z < L$, då $u = 0$ för $z = 0$ och $z = L$, och $u = \sin \frac{\pi z}{L} (1 - \cos \frac{\pi r}{R})$ för $r = R$.

36. Lös Laplaces ekvation $\nabla^2 u = 0$ i cylindern $f = \sqrt{x^2 + y^2} < R$, $0 < z < L$, då $u = 0$ för $z = 0$ och $z = L$, och $u = \sin \frac{\pi z}{L} (1 - \cos \frac{\pi r}{R})$ för $r = R$.

37. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen

$$\int_0^\infty [\sqrt{x} - P(x)]^2 e^{-x} dx \text{ då liten som möjligt.}$$

38. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x^4 - P(x)]^2 e^{-x^2/2} dx \text{ så liten som möjligt.}$$

39. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen

$$\int_0^{\infty} [e^{x/4} - P(x)]^2 x e^{-x} dx \text{ så liten som möjligt.}$$

40. Bestäm det polynom av formen $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ för vilket

$$\int_0^1 [P(x)]^2 dx \text{ är så litet som möjligt.}$$

41. Visa att $\int_0^1 x P_{2m}(x) dx = \frac{1}{3} \binom{3/2}{m+1}$.

42. Beräkna, t.ex. med hjälp av genererande funktionen, $H'_n(0)$, där H_n är Hermites polynom.

43. Visa följande formel för (de generaliserade) Laguerrepolyomen $L_n^\alpha(x)$:

$$\frac{d}{dx} L_{n+1}^\alpha(x) = -L_n^{\alpha+1}(x).$$

(Ledning: Använd genererande funktionen.)

44. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ med randvillkoret $u = z(x^2 + y^2)$ då $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

45. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $0 < a < r < b$ (sfäriska koordinater¹) med randvillkoren

$$\begin{cases} u = 1 + \cos \theta, & \text{då } r = a, \\ u = \cos 2\theta, & \text{då } r = b. \end{cases}$$

46. Sök en begränsad lösning till

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

47. Lös problemet

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = x, & 0 < x < 1, -\infty < y < \infty, \\ u'_x(0, y) = 0, \\ u(1, y) = y e^{-|y|}. \end{cases}$$

48. Låt f tillhöra $L^2(\mathbf{R})$ och sök en lösning till

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & -\infty < x < \infty, 0 < y < a, \\ u(x, 0) = 0, & u(x, a) = f(x). \end{cases}$$

Visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

¹ $x = r \cos \phi \sin \theta, y = r \sin \phi \sin \theta, z = r \cos \theta$

49. Bestäm en periodisk lösning till ekvationen $y'' - y' + y = f'(t)$, där

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 < t \leq 1, \\ t - 1 & \text{för } 1 < t < 2, \end{cases}$$

och f är periodisk med period 2. (Med $f'(t)$ avses distributionsderivatan.)

50. Om funktionen f gäller att

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{för } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{för } 1 < t < 3, \end{cases}$$

och att $f(t)$ är 3-periodisk. Bestäm $f'(t)$ (distributionsderivatan) och utveckla $f'(t)$ i komplex trigonometrisk Fourierserie. Använd resultatet för att beräkna Fourierserietvecklingen av $f(t)$.

51. Beräkna följande funktionen (dvs beräkna summan och uttrycka den m.h.a. kända funktioner)

$$f(\theta) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\theta}{(2n-1)^3}$$

52. Beräkna den komplexa Fourierserien till den periodiska funktionen $f(x)$ som är lika med $x(x^2 - \pi^2)$. Vad är seriens summan i punkterna 2π och $3\pi/2$?

53. Lös problemet

$$\begin{cases} u_{xx} + 1 = u_{tt}, & 0 < x < 2, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(x, 0) = x - x^2, \\ u(2, t) = -2, u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

54. Lös följande Dirichletproblemet på enhetsskivan

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$$

där funktionen f är funktionen $f(\theta) = \sin^2 \theta + \cos \theta$ (i polärkoordinater)

55. Låt

$$Q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^n(1-x)^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Q_n är ett polynom av grad n .

(a) Bestäm den ledande termen och den konstanta termen i $Q_n(x)$.

(b) Bestäm normen $\|Q_n\|$ av $Q_n(x)$ i $L^2(0, 1)$.

(c) Bevisa att $Q_n(x)$ och $Q_m(x)$ är ortogonala i $L^2(0, 1)$ om $n \neq m$.

56. Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig och har Fouriertransformen $\hat{f}(\xi) = \frac{\ln(1+\xi^2)}{\xi^2}$. Bestäm $f(0)$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

57. Bestäm lösningen $f(t)$, $t > 0$, till ekvationen

$$f''(t) - f'(t) + f(t) + 3 \int_0^t f(\tau) d\tau = 2e^t$$

med begynnelsevillkor $f(0) = 1, f'(0) = 0$.

58. Låt $u(x, t)$ vara lösningen til begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Bevisa att för $t > 0$,

$$\int_0^\pi |u_t(x, t)|^2 dx \leq \int_0^\pi |g(x)|^2 dx.$$

(Ledning: Lös uppgiften med variableseparation).

59. För vilka k kan Du garantera $f \in C^{(k)}$, där

$$(a) \quad f(\theta) = \sum_0^\infty \frac{\cos(n\theta)}{3^n}$$

$$(b) \quad f(\theta) = \sum_0^\infty \frac{\cos(2^n \theta)}{3^n}$$

Svar

$$1. \quad f(x) = \frac{4}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^\infty \frac{(-1)^n (1 + in\pi)}{n^2} e^{in\pi x}, \quad y = -\frac{4}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^\infty \frac{(-1)^{n-1} (1 + in\pi)}{n^2 (2n^2 \pi^2 + in\pi + 1)} e^{in\pi x}$$

$$2. \quad y(t) = \frac{2}{9} - \sum_{n=1}^\infty \frac{3(1 - \cos \frac{2n\pi}{3})}{\pi^2 n^2 (3 - \frac{4}{9} n^2 \pi^2)} \cos \frac{2n\pi t}{3}$$

$$3. \quad \cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{4n^2 - 1} \sin 2nx \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}). \quad \text{Summan blir } \frac{\pi^2}{64}.$$

$$4. \quad u(x, t) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^\infty \frac{4(-1)^{n-1}}{n^2 \pi^2} e^{-\sqrt{\frac{n\pi}{2}} x} \cos(n\pi t - \sqrt{\frac{n\pi}{2}} x)$$

$$5. \quad \frac{2}{2 \ln 2} \ln r + \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^\infty \frac{(-1)^{n_1}}{n^2 (2^n - 2^{-n})} (r^n - r^{-n}) e^{in\theta}$$

$$6. \quad a) -\frac{i\pi}{2a} \omega e^{-a|\omega|} \quad b) \frac{\pi}{2a^3} (1 + a|\omega|) e^{-a|\omega|}$$

$$c) \frac{\pi}{10} e^{-|\omega|} (1 - 2i \operatorname{sgn} \omega) - \frac{\pi}{10} e^{-2|\omega|} e^{i\omega} \left(\frac{3}{2} - 2i \operatorname{sgn} \omega \right)$$

$$d) -\frac{4iab\omega}{(\omega^2 + 2b\omega + a^2 + b^2)(\omega^2 - 2b\omega + a^2 + b^2)}$$

7. a) i b) $\frac{i}{2\sqrt{2}}$
8. $\frac{1}{2}$
9. $\pi(1 - e^{-1})$
10. $\frac{1}{9\pi}$
11. $\hat{f}(\omega) = \frac{2\pi\sqrt{\omega}}{1 + \omega}$ för $0 < \omega < 2$, 0 för övrigt. a) $\frac{\pi}{2}$, b) $2\pi\left(\ln 3 - \frac{2}{3}\right)$
12. $\frac{\pi}{8}(e^2 + 1)$
13. $\theta(t)e^{-2t} \cos t$
14. $u(t) = \frac{1}{2}e^{-t/\sqrt{3}}\theta(t) + \frac{1}{2}e^{\sqrt{3}t}(1 - \theta(t))$
15. $\frac{3}{4}e^{-2|t|} - te^{-2t}\theta(t)$
16. $h(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{t}{(1+t^2)^2}$; $x(t) = \cos \omega t$ ger $y(t) = \frac{\omega}{4}e^{-|\omega|} \sin \omega t$; ej kausalt, stabilt.
17. $\frac{\pi}{2\sqrt{6}}e^{-5/96}$
18. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{2}(-1)^n\right] e^{-n^2\pi^2/8+2|n|\pi} e^{in\pi t}$
19. summan blir $k(N - k)$.
20. $X(\mu) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2\pi i\mu n/N} = \frac{\sin \frac{\pi}{N}}{\cos \frac{2\mu\pi}{N} - \cos \frac{\pi}{N}}$
21. $c_n = \begin{cases} \pi(e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}})e^{-|n|} & \text{för } n \neq 0 \\ 2\pi(1 - e^{-\frac{1}{2}}) & \text{för } n = 0 \end{cases}$
22. $\frac{2 \sinh 1}{\frac{1}{2} \sinh 2 + 1} \cosh x + \frac{2e^{-1}}{\frac{1}{2} \sinh 2 - 1} \sinh x$
23. Egenvärden: $\lambda_k = \nu_k^2$, där ν_k är de positiva rötterna till ekvationen $\tan \nu a = \frac{3\nu}{2\nu^2 - 1}$
24. $\lambda_1 = r - \beta_1^2$, där β_1 är den positiva roten till ekv. $\tanh \beta = \frac{\beta}{2}$; $u_1(x) = e^{-2x} \sinh \beta_1 x$
 $\lambda_n = 4 + \beta_n^2$, där β_n , $n = 2, 3, \dots$, är de positiva rötterna till ekv. $\tan \beta = \frac{\beta}{2}$; $u_n(x) = e^{-2x} \sin \beta_n x$
 $e^{-2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{\lambda_N}[\sqrt{\lambda_n} + 2(-1)^n]}{\beta_n(\lambda_n - 2)} u_n(x)$
25. $u(x, y) = \frac{1}{6}(y^3 - y) + \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \sinh 2n\pi} (\sinh n\pi x + 7 \sinh n\pi(2 - x)) \sin n\pi y$

$$26. u(x, t) = 1 - x + \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} e^{-\frac{2}{3}(2k+1)^2 \pi^2 [(1+t)^{3/2} - 1]} \sin(2k+1)\pi x$$

$$27. u(x, y) = -\frac{8}{\pi^3} \sin \pi x \frac{\sin(\sqrt{20 - \pi^2} y)}{\sin \sqrt{20 - \pi^2}} - \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \sin(2k+1)\pi x \frac{\sinh(\sqrt{(2k+1)^2 \pi^2 - 20} y)}{\sinh \sqrt{(2k+1)^2 \pi^2 - 20}}$$

$$28. u(x, t) = e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x + 2\pi \sin 1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 \pi^2 - 1} \left[\frac{t}{n^2 \pi^2} - \frac{1}{n^4 \pi^4} (1 - e^{-n^2 \pi^2 t}) \right] \sin n\pi x$$

29.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (t+1)(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \pi^3} (e^{-2n^2 \pi^2 t} - 1) \sin n\pi x = \\ &= (t+1)(1-x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{6} - \frac{x^3}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \pi^3} e^{-2n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x \end{aligned}$$

$$30. u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2[(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{\ln 2} (-1)^n - 1]}{(n + \frac{1}{2}) \pi [(n + \frac{1}{2})^2 (\frac{\pi}{\ln 2})^2 + 1]} \frac{\sinh(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi \theta}{\ln 2}}{\sinh(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi^2}{4 \ln 2}} \sin(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi \ln r}{\ln 2}$$

$$31. \sin(2 \sin x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(2) \sin(2k+1)x$$

$$32. \frac{qc^2}{S\omega^2} \left(\frac{J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)}{J_0\left(\frac{\omega a}{c}\right)} - 1 \right) \sin \omega t$$

res.frekv. är $\frac{c}{a} \alpha_{0,n}$, där $\alpha_{0,n}$, $n = 1, 2, \dots$, är J_0 :s positiva nollställen.

$$33. u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8b^2[(2 + \frac{b}{2})\alpha_k^2 - 2b]}{\alpha_k^2(4\alpha_k^2 + b^2)J_0(\alpha_k)} e^{-(\frac{\alpha_k}{b})^2 t} J_0\left(\frac{\alpha_k r}{b}\right), \text{ där } \alpha_k \text{ är de pos.rötterna till } J_0(\alpha) + \frac{2}{b} \alpha J_0'(\alpha) = 0.$$

$$34. \text{ a. } v(r) = \frac{J_n(\omega r)}{J_n(\omega a)} \text{ om } J_n(\omega a) \neq 0.$$

$$\text{ b. } u(r, t) = \frac{J_n(\omega r)}{J_n(\omega a)} \sin \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\alpha_k t}{a} J_N\left(\frac{\alpha_k r}{a}\right), \text{ där } \alpha_k \text{ är de positiva nollställena till } J_n(x), \text{ och}$$

$$a_k = -\frac{2\omega}{a\alpha_k [J_{n+1}(\alpha_k)]^2 J_n(\omega a)} \int_0^a J_n(\omega r) J_n\left(\frac{\alpha_k r}{a}\right) r dr \left(= \frac{2\omega a}{(\omega^2 a^2 - \alpha_k^2) J_{n+1}(\alpha_k)} \right)$$

$$35. u(r, z) = \frac{I_0\left(\frac{\pi r}{L}\right)}{I_0\left(\frac{\pi R}{L}\right)} \sin \frac{\pi z}{L} - \frac{1}{2} \frac{I_0\left(\frac{2\pi r}{L}\right)}{I_0\left(\frac{2\pi R}{L}\right)} \sin \frac{2\pi z}{L}$$

$$36. \frac{\sqrt{\pi}}{16} \left(3 + 6x - \frac{1}{2}x^2 \right)$$

$$37. 3(2x^2 + 12)$$

$$38. \frac{8}{81} (x^2 + 12)$$

39. $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}$
41. $H'_{2k}(0) = 0, \quad H'_{2k+1}(0) = 2(-1)^k \frac{2^{2k+1}!}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$
43. $u = \frac{2}{5}R^2z + \frac{3}{5}(x^2 + y^2 + z^2)z - z^3$
44. $u(r, \theta) = \frac{1}{3(b-a)} \left(\frac{4ab}{r} - 3a - b \right) + \frac{a^2}{b^3 - a^3} \left(\frac{b^3}{r^2} - r \right) \cos \theta +$
 $+ \frac{2b^3}{3(b^5 - a^5)} \left(r^2 - \frac{a^5}{r^3} \right) (3 \cos^2 \theta - 1)$
45. $u(x, t) = \frac{4kt + 1 - 2x^2}{(4kt + 1)^{5/2}} e^{-\frac{x^2}{4kt+1}}$
46. $u(x, y) = \frac{1}{6}(x^3 - 1) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta}{(1 + \eta^2)^2} \frac{\cosh \eta x}{\cosh \eta} \sin \eta y d\eta$
47. $u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sinh \xi y}{\sinh \xi a} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \left(= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \frac{\pi y}{a}}{\cosh \frac{\pi(x-t)}{a} + \cos \frac{\pi y}{a}} f(t) dt \right)$
48. $y(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^\infty \frac{n\pi - i(1 - (-1)^n)}{2n\pi(n^2\pi^2 - 1 + in\pi)} e^{in\pi t}$
49. $f'(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^\infty [\delta(t - 3n - 1) - \delta(t - 3n)] = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^\infty \frac{2}{3} (e^{-in\frac{2\pi}{3}} - 1) e^{in\frac{2\pi}{3}t}$
 $f(t) = \frac{1}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^\infty \frac{e^{-in\frac{2\pi}{3}} - 1}{in\pi} e^{in\frac{2\pi}{3}t}$
50. $f(\theta) = -\frac{\pi}{4}(\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{\pi}{2}\theta)$, om $\theta > 0$ och $f(\theta) = -f(-\theta)$ om $\theta < 0$.
51. $12 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n^3}$. 0 resp $\frac{3}{8}\pi^3$.
52. $u(x, t) = -\frac{x^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^3} \cos((2k+1)\pi t) \sin(\frac{(2k+1)\pi}{2}x)$
53. $u(x, y) = -\frac{1}{4}(x^2 - y^2 - 2) + \frac{1}{2}x$ eller $u(r, \theta) = -\frac{1}{4}(r^2 \cos 2\theta - 2) + \frac{1}{2}r \cos \theta$ (i polärkoordinater).
54. (a) ledande termen är $(-1)^n(2n)(2n-1)\dots(n+1)$, konstanta termen är $n!$. (b) $\sqrt{(2n)!}$.
55. $f(0) = 1, \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = 1$.
56. $f(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$.