MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i MIN600
Linjär algebra och analys, Naturvetenskaplig Problemlösning
Datum: 00-12-16 , kl. 8.45-13.45
Telefonvakt: Anders Öhgren, tel. 0740–350646
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator

Tentan beräknas vara färdigrättad den 27/12. Resultaten anslås omgående och kan fås per telefon 772 3509 den 27/12. Tentorna kan hämtas i mottagningsrummet kl 12.30–13.00 varje vardag.

1. Sant eller falskt? (Rätt svar ger +1p; fel svar −1p; inget svar 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

(a) För alla inverterbara matriser A gäller att

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A^t)}.$$

(b) Funktionen $f(x) = \sin(x^2)$ är en udda funktion.

(c) Mängden av alla kontinuerliga funktioner på intervallet $[0,1]$ (dvs $C[0,1]$) är ett delrum av $C[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

(d) Rummet $C[0,1]$ har oändlig dimension.

(e) För alla fundamentalmatriser $X(t)$, dvs en matris där kolonnerna utgörs av linjärt oberoende lösningsvektorer till en linjär differentialekvation, finns det minst ett t så att $\det(X(t)) = 0$.

(f) Det finns kvadratiska matriser A, B, där A är ortogonal och B symmetrisk, så att ABA^{-1} inte är symmetrisk.

2. Visa att om u, v är element i ett linjärt rum med skalärprodukt så är

$$||u+v||^2 - ||u-v||^2 \leq 4||u||||v||. \quad (2p)$$

3. Låt V vara det linjära rummet $C[0,1]$ (se 1 c ovan) med skalärprodukten

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

Beräkna den ortogonala projektionen av $f(t) = 1 + t$ på det underrum av V som genereras (spänns upp) av $g(t) = t$.   (2p)

Var god vänd.

4. Låt F vara en linjär avbildning från U till W där U, W är linjära rum.

Rita en figur som förklarar vad nollrummet $N(F)$ och värderummet $V(F)$ är.

Som en ytterligare illustration, ge också en konkret matrisrepresentation av en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som har som nollrum den räta linje genom origo som också går igenom punkten $(1,2)$. (3p)

5. Låt V vara det linjära rum som består av alla (reella) 2×2 matriser och låt T vara en funktion från V till V enligt:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a+b \\ c+d & 0 \end{bmatrix}.$$

Visa att T är linjär. (2p)

6. Låt $u = (u_1, u_2)^t$ och $v = (v_1, v_2)^t$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^2$. Visa att följande funktion av u och v är en skalärprodukt.

$$(u, v) = u_1 v_1 - u_2 v_1 - u_1 v_2 + 3u_2 v_2.$$

(Skriv först ned definitionen av en skalärprodukt.) (2p)

7. Bestäm Fourierserien till $f(x)$ där

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{då } x \in [-\pi, 0], \\ x, & \text{då } x \in [0, \pi]. \end{cases} \qquad (3p)$$

Välj ett, men endast ett, av problemen 8 eller 8' nedan!

8. Hitta maxvärdet av funktionen

$$f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 6w^2 + 4xy + 4zw$$

på enhetssfären i $\mathbb{R}^4$. (5p)

8'. Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}. \qquad (5p)$$

Lycka till! /TL