MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i MIN600
Linjär algebra och analys, Naturvetenskaplig Problemlösning
Datum: 97-12-06, kl. 8.45-13.45
Telefonvakt: Anette Wiberg, tel. 0740-479626
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator

1. Sant eller falskt? (Rätt svar ger +1p; fel svar −1p; inget svar 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

(a) Låt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning och låt $n < m$. Då gäller att $V(F) \neq \mathbb{R}^m$.

(b) Mängden av alla polynom av grad exakt 3 bildar ett underrum i $\mathcal{P}_3$.

(c) Matriserna A och A^t har alltid samma rang.

(d) $||u|| = ||v|| \quad \Leftrightarrow \quad u + v \perp u - v$

(e) Två olika linjära avbildningar kan inte ha samma värderum.

(f) Om 0 är egenvärde till matrisen A, så är 0 även egenvärde till matrisen A^t.

2. Låt A vara en inverterbar $n \times n$ matris och låt $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vara en bas i $\mathbb{R}^n$. Visa att $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n$ också är en bas i $\mathbb{R}^n$. (2p)

3. Låt V vara ett linjärt rum med skalärprodukt. Visa att

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2) \quad \text{för alla} \quad u, v \in V\,.$$

Ge en geometrisk tolkning. (2p)

4. Visa att vektorerna

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \quad \text{och} \quad (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$$

bildar ett ortonormerat system i $\mathbb{R}^4$. Finn en ortonormerad bas i $\mathbb{R}^4$ i vilken de ingår. (2p)

5. Låt V vara det underrum i $C(\mathbb{R})$, som spänns av funktionerna $f_1(x) = e^{2x}\cos x$ och $f_2(x) = e^{2x}\sin x$.

(a) Visa att f_1 och f_2 bildar en bas i V. (1p)

(b) Låt $F(f) = f'$ $(= \frac{df}{dt})$. Visa att F är en linjär avbildning, $F : V \to V$ och finn matrisen A för F i basen f_1, f_2, (2p)

(c) Visa att A är inverterbar och finn A^{-1}. (1p)

(d) Finn en primitiv funktion till $g(x) = e^{2x}\cos x - 3e^{2x}\sin x$. (2p)

6. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara projektionen på planet $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$, parallellt med linjen $t(1, 0, -1)$. Bestäm matrisen för F (i standardbasen). (3p)

7. Lös systemet ordinära differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 4x_2(t) \\ x_2'(t) = 5x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}. \qquad \text{(2p)}$$

8. Bestäm Fourierserien med perioden 2π till funktionen

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{då} \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{då} \quad 0 < x < \pi \end{cases}.$$

Bestäm i vilka punkter Fourierserien och f sammanfaller. (2p)