Tentamensskrivning

Linjär Algebra

18/1 2000

Ulf Persson

1 Låt $k[x,y,z]_d = \{\sum_{i+j+k=d} a_{i,j,k} x^i y^j z^k; a_{i,j,k} \in k\}$ (homogena polynom av grad d)

i) Beräkna $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x,y,z]_3$
ii) Beräkna antalet homogena polynom av grad tre i tre variabler över kroppen $\mathbb{F}_3$ med tre element.
iii) Ge en formel i d för $\dim_k k[x,y,z]_d$

2 Finn det minimala polynomet till den linjära avbildningen $X : k[x]/(x^3+x+1) \to k[x]/(x^3+x+1)$ givet av $X(\overline{p}(x)) = \overline{xp(x)}$

3 Låt N vara en nilpotent linjäravbildning på ett vektorrum V med $\dim V = 4$

a) Beräkna antalet (upp till similaritet) olika fall!
b) I varje förekommande fall finn det minsta talet n (indexet) så att $N^n = 0$!
c) I varje förekommande fall beräkna $\dim \ker(N^k)$ och $\dim \mathrm{Im}(N^k)$ för $1 \leq k \leq n$ där n är indexet!

4 Finn en associerad symmetrisk bilinjär form till den kvadratiska formen

$$x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2$$

5 Skriv ner alla unitära 2×2 matriser med koefficienter i ringen $\mathbb{Z}[\rho]$ (d.v.s. alla tal av formen $a + b\rho$ med $a, b \in \mathbb{Z}$ och $\rho = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$) och med determinant 1 och visa att dessa utgör en grupp.

Ledning: ρ är en primitiv sjätte rot, och $\rho^2 - \rho + 1 = 0$. Det finns sex element med norm 1

i) Gruppera elementen i konjugatklasser

ii) Beräkna karaktären hos den 2-dimensionella representationen.

iii) Beräkna samtliga karaktärer för gruppens irreducibla representationer, och slut att den givna är den enda 2-dimensionella representationen.

iv) Beräkna de karaktäristiska ekvationerna för samtliga de matriser som förekommer!

6 Låt $A(x,y)$ vara en non-degenererad alternerande form på ett vektorrum V

i) Visa att vi kan finna en bas $e_1, \dots e_n, f_1 \dots f_n$ sådan att $A(e_i, e_i) = A(f_i, f_i) = 0$ och $A(e_i, f_i) = -A(f_i, e_i) + 1$ (En sådan bas kallas standardbasen)

ii)Bestäm matrisen A så att

$$(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

beskriver en alternerande form med standardbasen $(1,0),(0,1)$

iii) Beskriv alla 2×2 matriser B som lämnar ovanstående form invariant.

7 Låt A vara en skev-symmetrisk matris, visa att dess minimala polynom antingen består endast av jämna eller udda potenser, och slut att på ett rum av udda dimension gäller att $\det(A) = 0$.

Ledning: Om $p(x)$ är det minimala polynomet betrakta $p(A)^* = p(A^*)$

8 Givet en vektor $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ fyll i de resterande elementen så att matrisen

$$A_v = \begin{pmatrix} * & * & * \\ z & * & * \\ -y & x & * \end{pmatrix}$$

blir skevsymmetrisk.

i) Beräkna $d = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A_v^2)$ och jämför med $\|v\|$

ii) Finn $\mathrm{Ker}(A_v)$

iii) Skriv ner den karaktäristiska ekvationen för A_v uttryckt i d.

iv) Låt $exp(A) = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 \dots$ visa att

$$exp(A_v) = I + \lambda A + \mu A^2$$

för lämpligt valda λ och μ, och bestäm dessa koefficienter explicit i d.

v) Visa att $exp(A_v)$ är ortogonal med determinant 1 och således en vridning. Finn dess rotationsaxel uttryckt i v

vi) Ge villkor på λ, μ så att $I + \lambda A + \mu A^2$ är en ortogonal matris för A en skev-symmetrisk 3×3 matris.

vii) Finn en skevsymmetrisk matris A så att

$$exp(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(vii)$'$ Om du inte har lyckats finna en explicit formel för $exp(A)$ så samma fråga för

$$I + \sin\theta A + (1 - \cos\theta)A^2$$

där det gäller att bestämma θ och skev-symmetriska A så att $\mathrm{Tr}(A^2) = -2$)

9 Låt S_3 operera på $\mathbb{C}[x, y, z]_3$ genom att permutera x, y, z

i) Skriv ner karaktären för representationen, och sönderdela den i irreducibla beståndsdelar.

ii) Ge en bas för det invarianta delrummet av $\mathbb{C}[x, y, z]$

iii) Kalla ett polynom $P(x, y, z)$ för alternerande om P byter tecken varje gång två variabler byter plats. Finn dimensionen av alla alternerande homogena polynom av grad tre, och om möjligt ge en bas för dessa.