Omtenta för Linjär Algebra

1.1. 28/2 2000

1 Finn samtliga invarianta underrum till matrisen

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 8 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

2 Vi har $x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ där båda faktorerna är irreducibla över $\mathbb{Q}$.

i) Slut av detta att det är omöjligt att finna en 2×2 matris $A \neq I$ av ordning fem (d.v.s. $A^5 = I$) med koefficienter i $\mathbb{Q}$

ii) Men att det är möjligt att finna en 4×4 matris med denna egenskap. Ge exempel på en sådan.

iii) Visa att över $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ splittras fjärdegrads polynomet i två kvadratiska polynom, och utnyttja detta för att skriva ner en 2×2 matris av ordning fem med koefficienter i denna kroppen.

Hint: Över $\mathbb{C}$ har vi splittringen

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x-\rho)(x-\rho^2)(x-\rho^3)(x-\rho^4)$$

där ρ är en primitiv femte rot (d.v.s $\rho \neq 1, \rho^5 = 1$) Sätt $\theta = \rho + \rho^4$ och visa att $1, \theta, \theta^2$ är linjärt beroende över $\mathbb{Q}$ och satisfierar således en andragrads ekvation, bestäm denna, och visa att $\rho^2 + \rho^3$ satsifierar samma ekvation.

3 Låt M vara en matris sådan att summan av alla kollonvektorer är en konstant ($= \lambda$). Visa att λ är ett egenvärde till M. Visa även att samma sak gäller om summan av alla rader är en konstant. Vad kommer egenvärdet att vara i detta fallet.

4 Bestäm alla unitära 3×3 matriser med determinant ett. Speciellt beräkna antalet sådana.

5 Låt S_3 operera på alla vektorrummet V av homogena polynom av grad fem i tre variabler x, y, z genom permutation av variablerna.

i) Finn en bas för alla invarianta polynom

ii) Splittra upp V i irreducibla komponenter.

6 Låt E vara en 4×4 permutations matris (d.v.s en som permuterar bas vektorerna).

i) Visa att permutations matriserna utgör en grupp isomorf med S_4.

ii) Vilka är de möjliga ordningarna för permutations matriser

iii) Vilka är de möjliga minimala ekvationerna för dessa.

7 Betrakta ett 4-dimensionellt vektorrum V över $\mathbb{F}_2$ (kroppen med två element).

1) Beräkna antalet element i V.

Definiera begreppet entropi för en vektor $v \in \mathbb{F}_2^4$ via

$$e(V) = -\frac{1}{2}(|A - B|)$$

där A är antalet 1'or och B är antalet 0'or.

Med entropi menar vi graden av 'oordning', ju större blandning av ettor och nollor desto mera oordning.

2) Visa att $-2 \leq e(V) \leq 0$ och beräkna antalet element med entropi $-2, -1, 0$ respektive.

Betrakta nu alla linjära avbildningar $M_4(\mathbb{F}_2) = \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_2^4, \mathbb{F}_2^4)$

3a) Beräkna antalet element i M_4

3b) Beräkna antalet element i $GL(4, \mathbb{F}_2)$

Med samma formel som ovan definierar vi entropin för 4×4 matriser.

Man kan visa att i allmännhet gäller att $e(AB) \geq e(A)$ för de flesta par av matriser. Multiplicerar vi 'ordnade' matrsier blir produkten i allmännhet mindre ordnad

4a) Beräkna antalet matriser med entropi noll.

4b) Visa att om A är en inverterbar matris så gäller $e(A) \geq -4$ och bestäm alla inverterbara matriser A med minimal entropi, och visa att de utgör en grupp G.

4c) Beräkna antalet inverterbara matriser med $e(A) = -3$

Låt θ, ψ vara symboler och definiera en (kommutativ) multiplikation via

$$\theta^2 = \theta + 1$$
$$\psi^2 = \theta\psi + 1$$

Betrakta nu vektorrummet över $\mathbb{F}_2$ med bas $1, \theta, \psi, \theta\psi (= \psi\theta)$ isomorft med V.

5a) Utför multiplikationen

$$(1 + \theta + \psi)(1 + \psi)$$

och skriv resultatet som en summa av basen $1, \theta, \psi, \theta\psi$

5b)Låt $\alpha \in V$ visa att entdera

i) $1, \alpha$

ii) $1, \alpha, \alpha^2$

iii) $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$

är linjärt beroende och α satisfierar en ekvation (den så kallade minimala ekvationen) av grad 1,2 eller 4.

5c) Beräkna antalet element α i de tre olika fallen.

Man kan visa att varje element $\alpha \neq 0$ är inverterbart och att V utgör en ändlig kropp. Vidare kan man visa att gruppen V^* av inverterbara element är cyklisk.

6a) Avbildningen $x \mapsto \alpha x$ är en linjär avbildning från V till V. Givet basen $1, \theta, \psi, \theta\psi$ skriv ner matrisen $M(\alpha)$ för $\alpha = a + b\theta + c\psi + d\theta\psi$

6b) Jämför den minimala ekvationen för α och det minimala polynomet för $M(\alpha)$. Vidare bestäm den senares karaktäristiska ekvation.

Låt nu $A \in M_4(\mathbb{F}_2)$ vara en matris vars karaktäristiska ekvation är irreducibel.

7) Skriv ner samtliga möjligheter för den karaktäriska ekvationen.

8*) Visa att varje matris A vars karaktäristiska ekvation är irreducibel är 'similar' till en matris av formen $M(\alpha)$

9) Skriv ner den irreducibla fjärdegradsekvationen som korresponderar till matriser med ordning fem.

10) Finn en matris A med ordning femton. Visa att det finns två typer en med spår noll och en annan med spår ett. Skriv om möjligt ner en av vardera sorten.

11) Beräkna antalet matriser A som kommuterar med en matris, vars karaktäristiska ekvation är irreducibel.

12) Beräkna totala antalet matriser av ordning femton.

13) Beräkna ordningen n hos en matris A vars minimala polynom innehåller en irreducibel faktor av grad tre.

14) Finn alla irreducibla polynom av grad tre.

15) Beräkna totala antalet matriser av ordning n (n enligt uppgift 13))

16a) Beräkna ordningen hos en matris vars minimala polynom är $x^2 + x + 1$

16b) Bestäm alla matriser som kommuterar med A sådan att A har den minimala ekvationen $X^2 + X + 1 = 0$ Betrakta den bilinjära formen $< v, w >= \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$.

17) Beskriv alla elementen i gruppen som består av matriser A sådana att

$$< Av, Aw >=< v, w >$$