Omtentamensskrivning

Linjär Algebra

MAN650

15/4 2000

8^{45}-13^{45}

Ulf Persson

Telefonvakt: S.Sandberg 0740-479625

1 Låt $k[x,y,z,w]_d = \{\sum_{i+j+k+l=d} a_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l; a_{i,j,k,l} \in k\}$ (homogena polynom av grad d)

i) Beräkna $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x,y,z,w]_3$

ii) Beräkna antalet homogena polynom av grad två i fyra variabler över kroppen $\mathbb{F}_5$ med fem element.

iii) Ge en formel i d för $\dim_k k[x,y,z,w]_d$

2 Givet matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ge exempel på en vektor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sådan att v, Av spänner rummet. Ge exempel på en matris $A \neq 0$ så att v, Av aldrig spänner rummet för något val av v. Slutligen ge exempel på en matris A med rationella koefficienter sådan att v, Av alltid spänner rummet för varje val av $0 \neq v \in \mathbb{Q}^2$. Motivera dina val.

3 Finn det minimala polynomet till den linjära avbildningen
$X : k[x]/(x^2-1) \to k[x]/(x^2-1)$ givet av $X(\overline{p}(x)) = \overline{xp(x)}$

4 Finn en associerad symmetrisk bilinjär form till den kvadratiska formen

$$x^2 + xy - y^2$$

5 Låt $A(x,y)$ vara en non-degenererarad alternerande form på ett vektorrum V

i) Visa att vi kan finna en bas $e_1, \dots e_n, f_1 \dots f_n$ sådan att $A(e_i, e_i) = A(f_i, f_i) = 0$ och $A(e_i, f_i) = -A(f_i, e_i) = 1$ (En sådan bas kallas standardbasen)

ii)Bestäm matrisen A så att

$$(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

beskriver en alternerande form med standardbasen $(1,0),(0,1)$

iii) Beskriv alla 2×2 matriser B som lämnar ovanstående form invariant.

6 Betrakta den kvadratiska formen $x^2 + y^2 - z^2 - w^2$

i) Finn ett delrum W av $\mathbb{R}^4$ sådan att restriktionen av den kvadratiska formen till denna är trivial. (Ju större delrum, desto mer poang)

ii) Finn ett delrum V sådan att restriktionen av formen är positivt definit. (Återigen ju större delrum, desto mer poäng)

7 Låt S_3 operera på $\mathbb{C}[x, y, z]_4$ genom att permutera x, y, z

i) Skriv ner karaktären för representationen, och sönderdela den i irreducibla beståndsdelar.
ii) Ge en bas för det invarianta delrummet av $\mathbb{C}[x, y, z]_4$
iii) Kalla ett polynom $P(x, y, z)$ för alternerande om P byter tecken varje gång två variabler byter plats. Finn dimensionen av alla alternerande homogena polynom av grad tre, och om möjligt ge en bas för dessa.

Tentan rättad onsdag 19/4

772 35 24