Tentamensskrivning i linjär och multilinjär algebra(Mam 750)

Torsdagen den 31 oktober, 2002

8.45 - 13.45

1 Beräkna automorfismgrupperna till följande abelska grupper
a) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
b) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$
c) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$

2 Låt R vara en kommutativ ring med en 'etta' (d.v.s. $1 \in R$).
a) Antag att R har ett unikt maximalt ideal $\mathfrak{m}$ (en så kallad lokal ring) visa att x är inverterbart (d.v.s. det finns x^{-1} så att $xx^{-1} = 1$) omm $x \notin \mathfrak{m}$.
b) Låt $\mathfrak{p}$ vara ett prim-ideal[1], och definera $R_{\mathfrak{p}}$ som alla bråk på formen $\mathfrak{a}s$ där $s \notin \mathfrak{p}$ (med de sedvanliga identifikationerna $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ omm $at = bs$ och de gängse definitionerna på addition och multiplikation). Visa att $R_{\mathfrak{p}}$ är en ring med ett unikt maximalt ideal, och beskriv detta maximala ideal samt kvotkroppen. (Denna konstruktion går under benämningen lokalisering i primidealet $\mathfrak{p}$).

3 Beräkna dimensionen av alla 3×3 matriser, som kommuterar med alla 3×3 permutationsmatriser. Visa att dessa både utgör en del-algebra och en del-liealgebra av algebran $M_3(\mathbb{C})$ av alla 3×3 matriser.

4 Låt $K = \mathbb{F}_3$ vara kroppen med tre element, och V vektorrummet av alla 2×2 matriser med koefficienter i K och med spåret noll. Beräkna antalet element i den yttre algebran $\bigwedge(V)$

5 Låt V vara ett vektorrum över en kropp K. Med en algebra struktur på V menas en produkt ab som satisfierar vänster och höger distributivitet, samt $(\lambda a)(\ ub) = \lambda\mu(ab)$. Visa att en algebrastruktur ges av en tensor. Bestäm typen av tensorn!

6 Visa att det irreducibla (över $\mathbb{Q}$) cyklotomiska polynomet $\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ (notera $(x-1)\Phi_5(x) = x^5 - 1$) splittras i två kvadratiska polynom över $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ *Ledning: Låt ρ vara en primitiv 5-te enhetsrot (d.v.s. $\rho \neq 1, \rho^5 = 1$) och sätt $\rho + \rho^{-1} = w$ och visa att $w \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$*
Utnyttja denna splittring, eller på annat sätt, ge exempel på ett element av ordning fem i $GL(2, \mathbb{Q}(\sqrt{5}))$.
Finn en kvadratisk form i diagonalform över $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ som är invariant under gruppen $\mathbb{Z}_5$ som genereras av detta element.

7 Låt V vara en irreducibel S_3-modul av dimension två. Uppdela S_3-modulen $\mathrm{Hom}(S^2(V), V)$ i irreducibla komponenter.
($S^2(V)$ *betecknar, som bekant, rummet av alla kvadratiska former på* V)

8 En automorfism av typ $x \mapsto axa^{-1}$ (konjugering med ett element a) kallas en inre automorfism.

a) Visa att de inre automorfismerna utgör en normal delgrupp bland alla automorfismer. (Kvoten benämnes gruppen av de yttre automorfismerna).

b) Låt $\psi : G Gl(V)$ är en representation av en grupp G på ett vektorrum V. Vidare låt θ vara en automorfism. Visa att om θ är en inre automorfism så är representationen $\psi(\theta)$ alltid ekvivalent med ψ.

c) Om θ inte är en inre automorfism, kan man då alltid finna en representation ψ sådan att $\psi(\theta)$ inte är ekvivalent med ψ?

c$'$) Visa att en omformulering av c) kan erhållas genom att visa att gruppen av yttre automorfismer kan representeras som en delgrupp av permutationsgruppen av alla irreducibla karaktärer, och att ställa frågan huruvida denna representation är trogen.

Ulf Persson

28/10 2002
`vakt:` *Sergey Kiteav 0740 350646*