

Tentamensskrivning i linjär och multilinjär algebra(Mam 750)

Lördagen den 4 januari, 2003

8.45-13.45

1 Beräkna ordningen av automorfismgrupperna till följande abelska grupper

a) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

b) $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$

2 Visa att de rationella funktionerna $\frac{1}{x-a}$ är linjärt oberoende för skilda konstanter a . Vad för slutsats kan vi dra om dimensionen av kroppen av alla rationella funktioner $\mathbb{C}(X)$ över \mathbb{C} ?

3 De Hamiltonska kvaternionerna \mathbb{H} och matrisringen $M(2, \mathbb{R})$ utgör båda liealgebror under $[a, b] = ab - ba$. Visa att båda har 3-dimensionelle del-algebror. Karaktärisera dessa!

4 På hur många olika sätt upp till konjugering kan vi inbädda S_3 i $Sl(4, \mathbb{C})$?

Ledning: Betrakta olika irreducibla dekompositioner av ett 4-dimensionellt vektorrum med en verkan av S_3 . Vidare för varje irreducible modul, beräkna determinanten för varje konjugatklass av element i S_3

5 $\text{Hom}(\mathbb{Z}_4^2, \mathbb{Z}_4^2)$ är en ändlig modul över \mathbb{Z} . Uppdela den i cykliska delmoduler.

6 Ge ett exempel på en 3×3 matris med rationella koefficienter sådan att dess karaktäristiska polynom är $X^3 + X + 1$. Har en sådan matris några invarianta delrum definierade över \mathbb{Q} ?

7 Beräkna $\mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_{10}$!

8 Låt M vara en ändlig abelsk grupp, och låt p vara ett primtal. Beteckna med $o_p(M)$ antalet element med ordning som delar p . (D.v.s. nollan eller element med ordning p). Om

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

är en kort exakt sekvens. Ge en formel för $o_p(M)$ i termer av $o_p(M')$ och $o_p(M'')$.

Ulf Persson

19/12 2002

vakt: *Fredrik Engström 0740 350646*