Tentamensskrivning i linjär och multilinjär algebra(Mam 750)

Fredagen den 26 mars, 2004

12.00-16.00

1 Beräkna ordningen av automorfismgrupperna till följande abelska grupper
a) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
c) $\mathbb{Z}_8$

2 Visa att de rationella funktionerna $\frac{1}{x-a}$ är linjärt oberoende för skilda konstanter a. Vad för slutsats kan vi dra om dimensionen av kroppen av alla rationella funktioner $\mathbb{C}(X)$ över $\mathbb{C}$?

3 De Hamiltonska kvaternionerna $\mathbb{H}$ och matrisringen $M(2,\mathbb{R})$ utgör båda liealgebror under $[a,b] = ab - ba$. Visa att båda har 3-dimensionella del-algebror. Karaktärisera dessa!

4 Låt $K = \mathbb{F}_3$ vara kroppen med tre element, och V vektorrummet av alla 2×2 matriser med koefficienter i K och med spåret noll. Beräkna antalet element i den yttre algebran $\bigwedge(V)$

5 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_4^2, \mathbb{Z}_4^2)$ är en ändlig modul över $\mathbb{Z}$. Uppdela den i cykliska delmoduler.

6 Låt M vara en ändlig abelsk grupp, och låt p vara ett primtal. Beteckna med $o_p(M)$ antalet element med ordning som delar p. (D.v.s. nollan eller element med ordning p). Om

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

är en kort exakt sekvens. Ge en formel för $o_p(M)$ i termer av $o_p(M')$ och $o_p(M'')$.

7 Ge ett exempel på en 3×3 matris med rationella koefficienter sådan att dess karaktäristiska polynom är $X^3 + X + 1$. Har en sådan matris några invarianta delrum definerade över $\mathbb{Q}$?

8 Låt L vara en ändlig kroppsutvidgning av dimension n av en delkropp K. Visa att de linjära avbildningarna $x \mapsto ax$ för $a \in L$ representerar L såsom en delkropp $\tilde{L}$ av matrisringen $M_n(K)$. Är det möjligt att finna en än större delkropp F så att

$$\tilde{L} \subset F \subset M_n(K)$$

Ulf Persson

25/3 2004