Tentamensskrivning i linjär och multilinjär algebra

Lördagen den 20 oktober, 2007

M

8.30 - 13.30

1 Determinanten av 2×2 matriser utgör en kvadratisk form på dessa. Bestäm dess signatur, samt ge exempel på maximala isotropiska delrum!

2 Visa att en multiplikativ struktur på ett n-dimensionellt vektorrum kan naturligt betraktas som en tensor. Vilken? Speciellt vad är dimensionen av alla multiplikativa strukturer.

3 Låt A vara ett $k-$vektorrum med en icke-nödvändigtsvis associativ multiplikation. En linjär avbildning D säges vara en derivation om

$$D(xy) = x(Dy) + (Dx)y$$

a) Visa att om D och E är derivationer, är även kommutatorn $[D, E] = DE-ED$ en derivation, och ge exempel där DE är inte en derivation.

b) Visa att i en Lie-algebra L är den linjära avbildningen

$$x \mapsto [a, x]$$

en derivation med avseende på Lie-produkten.

4 Beräkna antalet sätt (upp till konjugering) som gruppen S_3 kan inbäddas i $GL(n, \mathbb{C})$ och $SL(n, \mathbb{C})$, där den senare gruppen utgöres av alla matriser med determinant ett.

5 Låt A, B vara två kvadratiska matriser. Beräkna spåret av dess tensorprodukt uttryckt i respektive spår.

6 Låt G vara en ändlig grupp som verkar på ett ändligt-dimensionellt reellt vektorrum V och v en godtycklig vektor $v \neq 0$. Visa att det finns åtminstone en icke-trivial positiv definit form invariant under G och sådan att längden på v är ett.

7 Betrakta delgruppen G av $SO(4, \mathbb{R})$ bestående av heltalsmatriser.

a) Visa att G är en ändlig grupp och bestäm antalet element.

b) Beskriv G som en delgrupp av index två av en halv-direkt produkt av två grupper.

c) Beräkna karaktären för den givna inbäddningen av G samt visa att den är irreducibel.

Ulf Persson

16/10 2007

`vakt:` *Ida Säfström 076 272 1861*