Inled. kurs, MMG000/Naturv.matematik A, MMGK10; Funktionslära 080828

1. **a)** $x^2+2x+3=(x+2)^2-1+3=(x+1)^2+2$ **b)** $(x-\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2+1=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}$ **c)** $-3x^2+9x-12=-3(x^2-3x+4)=-3((x-\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2+4)=-3(x-\frac{3}{2})^2-\frac{21}{4}$

---

2. **a)** $D\tan(\sin x)=\frac{1}{\cos^2(\sin x)}D\sin x=\frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$ **b)** $D(\cos(x^2)\ln x)=-\sin(x^2)2x\ln x+\cos^2(x^2)(1/x)$ **c)** $D(x^x)=D(e^{\ln x^x})=D(e^{x\ln x})=e^{x\ln x}D(x\ln x)=x^x(1\cdot\ln x+x\frac{1}{x})=(1+\ln x)x^x$

---

3. $x+3\geq\frac{2x}{x-2}\Leftrightarrow x+3-\frac{2x}{x-2}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x+3)(x-2)-2x}{x-2}\geq 0\Leftrightarrow\frac{x^2-x-6}{x-2}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x+2)(x-3)}{x-2}\geq 0$ Teckenstudietabell ger:

x		-2		2		3	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{(x+2)(x-3)}{x-2}$	$-$	0	$+$	ej def	$-$	0	$+$

vilken ger svaret $-2\leq x<2$ eller $x\geq 3$.

---

4. $2x^4+x^3-3x^2-10x-8=(x+1)(x-2)(2x^2+ax+4)\Rightarrow a=3$ Alltså är rötterna till ekvationen: $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_{3,4}=\frac{-3\pm i\sqrt{23}}{4}$.

---

5. **a)** $\int_1^2 xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{d}{dx}(e^{x^2})\,dx=\frac{1}{2}[e^{x^2}]_1^2=\frac{e}{2}(e^3-1)$ **b)** $\int\frac{1}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})+1}\,dx=[t=x/\sqrt{2},\ dt=(1/\sqrt{2})dx]=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}\sqrt{2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan t)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan\frac{x}{\sqrt{2}})+C$ **c)** $\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x-1}}=[t=\sqrt{x-1},\ x=t^2-1,\ dx=2t\,dt]=2\int\frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt=2\int\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}\,dt=\ln|t-1|-\ln|t+1|+C=\ln|\sqrt{x-1}-1|-\ln|\sqrt{x-1}+1|+C$ **d)** $\int\sin\sqrt{x}\,dx=[t=\sqrt{x},x=t^2]=\int 2t\sin t\,dt=[PI]=2(-t\cos t-\int-\cos t\cdot 1\,dt)=-2t\cos t+2\int\cos t\,dt=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$

---

6. **a)** $f(x)=\frac{x^2-1}{3(x+1)(x-1/3)}+\frac{1}{2(x+1)}=\cdots=\frac{2x+1}{2(3x-1)}$ för $x\neq-1$ och uttrycket $\to\frac{1}{8}$ då $x\to-1$. Alltså gäller att A=$\frac{1}{8}$ medför att f är kontinuerlig; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1/3\}$. **b)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}(1-4/x^2+19/x^3)}{\cancel{x^3}(2+1/x+1/x^2-1/x^3)}=\frac{1}{2}$ **c)** $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}(1-5/e^x)}{8e^{3x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}(\frac{1-5/e^x}{8})=0\cdot\frac{1}{8}=0$ **d)** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=(\ell\text{'Hospital})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}$

---

7. Enligt integralkalkylens huvudsats gäller att $y'=\cos x$ och härav följer $y''=\sin x$. Vidare gäller att $y(x)=\int_0^x\cos t\,dt=[\sin t]_0^x=\sin x-\sin 0=\sin x$. Då gäller alltså att $y''=y\Leftrightarrow y''-y=0$ som är en i uppgiften eftersökt ekvation.

---

8. Se kursboken för ett bevis av integralkalkylens huvudsats.
