

1.  $-5x^2+15x-25 = -5(x^2-3x+5) = -5(x^2+2(-\frac{3}{2})x+5) = -5((x-\frac{3}{2})^2 - (-\frac{3}{2})^2+5) = -5((x-\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{20}{4}) = -5((x-\frac{3}{2})^2 + \frac{11}{4}) = -5(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{55}{4} \leq -\frac{55}{4}$  så största värdet är  $-\frac{55}{4}$  som antas för  $\frac{3}{2}$ .

2.  $x + 3 \geq \frac{2x}{x-2} \Leftrightarrow x + 3 - \frac{2x}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-2)-2x}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-3)}{x-2} \geq 0$  Teckenstu-

	$x$	$-2$	$2$	$3$	
dietabell ger:	$x + 2$	-	0	+	+
	$x - 2$	-	-	0	+
	$x - 3$	-	-	-	0
	$\frac{(x+2)(x-3)}{x-2}$	-	0	+	ej def

vilken ger svaret  $-2 \leq x < 2$  eller  $x \geq 3$ .

3. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(6-1/x^2)(5+1/x)}{x^3(15-1/x^2+1/x^3)} = 2$  b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{1} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+1/x^2}+|x|\sqrt{1-1/x+1/x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+\sqrt{1-1/x+1/x^2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-5x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(x+\frac{1}{3})}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x+\frac{1}{3})}{x+2} = \frac{7}{4}$  d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = (\ell'Hospital) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$

4. a)  $D(x \ln x) = 1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x} = 1 + \ln x$  b)  $D(\frac{\tan x}{e^{3x^2}}) = \frac{(1+\tan^2 x)e^{3x^2} + (\tan x)6xe^{3x^2}}{(e^{3x^2})^2} = \frac{(\tan^2 x + 6x \tan x + 1)e^{3x^2}}{(e^{3x^2})^2} = \frac{\tan^2 x + 6x \tan x + 1}{e^{3x^2}}$  c)  $D(\tan \sin x^2) = (1/\cos^2(\sin x^2))D(\sin x^2) = (1/\cos^2(\sin x^2))(\cos x^2)D(x^2) =$   
 $= (1/\cos^2(\sin x^2))(\cos x^2)2x = \frac{2x \cos x^2}{\cos^2(\sin x^2)}$  d)  $D(x^{\cos x}) = D(e^{\ln(x^{\cos x})}) = D(e^{\cos x \ln(x)}) =$   
 $= e^{\cos x \ln(x)} D(\cos x \ln(x)) = x^{\cos x} (-\sin x \ln x + (\cos x) \frac{1}{x})$

5. a)  $\int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)} dx = \int_0^1 \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)} dx = \int_0^1 \frac{-1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-3)} dx = [-\ln|x-2| + \ln|x-3|]_0^1 =$   
 $-\ln 1 + \ln 2 - (-\ln 2 + \ln 3) = 2 \ln 2 - \ln 3$  b)  $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = [t = \cos x, dt = -\sin x dx] = -\int \frac{1}{1+t^2} dt =$   
 $-\arctan t + C = -\arctan(\cos x) + C$

6. a) 1:a ordningens linjär ODE. IF:  $e^{\int a dx} = e^{ax} \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{ax}y) = c_0 e^{ax} \Rightarrow e^{ax}y = \int \frac{d}{dx}(e^{ax}y) dx = \int c_0 e^{ax} dx = \frac{c_0}{a} e^{ax} + C$ . Vi får alltså att  $y = \frac{c_0}{a} + C e^{-ax}$ . b) Separabel ODE.  $\frac{dy}{dx} = 2xy^2 \Rightarrow \frac{1}{y^2} dy = 2x dx$  eller  $y = 0$ . Vi ser att  $y = 0$  är en (potentiellt) singular lösning. Om  $y \neq 0$  har vi att  $-\frac{1}{y} = \int \frac{1}{y^2} dy = \int 2x dx = x^2 + C \Rightarrow y = -\frac{1}{x^2+C}$  där  $C \in \mathbb{R}$ . Vi ser från detta att  $y = 0$  ej kan inkluderas i den allmänna lösningen så  $y = 0$  är en *singular* lösning.

7.  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{x} > 0\} = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ .  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x(x+1)(x^2+1)}$  Teckenstudietabell

	$x$	$-1$	$0$	$1$	
ger:	$f'$	-	$\xi$	$\xi$	+
	$f$	$\searrow$	$\xi$	$\xi$	$\nearrow$

Det gäller att  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$  och  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$  så

att  $x = -1$  och  $x = 0$  är lodräta asymptoter. Vidare är  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\pi/2$  så  $y = \pi/2$  och  $y = -\pi/2$  vågräta asymptoter. Då  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  finns ingen sned asymptot. Det är nu lätt att rita grafen.

8.  $\frac{d}{dx}(\int_a^x f(t) dt) =$  (enl. derivatans definition)  $= \lim_{h \rightarrow 0} (\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt) / h = \lim_{h \rightarrow 0} (\int_x^{x+h} f(t) dt) / h$   
 $=$  (enl. integralkalkylens medelvärdesats)  $= \lim_{h \rightarrow 0} (f(\xi(h))(x+h-x)) / h =$  ( $\xi(h)$  ligger mellan  $x+h$  och  $x$ )  $= \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi(h)) =$  (ty  $f$  kont.)  $= f(\lim_{h \rightarrow 0} \xi(h)) =$  (ty  $\xi$  ligger mellan  $x$  och  $x+h$ )  $= f(x)$ . Vidare:  $\frac{d}{dx}(\int_a^x f(t) dt - F(x)) = 0$  så  $\int_a^x f(t) dt = F(x) + C$  och insättning av  $x = a$  resp  $x = b$  ger  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ .