MATEMATIK
Göteborgs universitet

Lösning till MMG000 Inledande kurs del 3 (Geometri), 7,5hp, 08 12 19, kl 8.30 –13.30

1. Bestäm en ekvation för mittpunktsnormalen till sträckan AB, där $A = (1, 2)$ och $B = (3, -4)$.

Linjen genom A och B har riktningskoefficient $(-4-2)/(3-1) = -3$. Det betyder att den sökta linjens riktningskoefficient är $-1/(-3) = 1/3$. Den har därför en ekvation av formen

$$y = x/3 + m.$$

Den ska gå genom mittpunkten til AB som har koordinaterna $((1 + 3)/2, (2 - 4)/2) = (2, -1)$. Insatt i ekvationen ger detta:

$$-1 = 2/3 + m,$$

så $m = -5/3$. Ekvationen för mittpunktsnormalen är alltså $y = x/3 - 5/3$, eller efter hyfsning $3y - x + 4 = 0$.

Svar: $3y - x + 5 = 0$.

2. En triangel har sidor av längd 5, 7 och 8. Bestäm triangelns höjd mot sidan av längd 5.

Låt h vara den sökta höjden. Vi ska då ha $5h/2 = T$, där T är triangelns area. Den kan beräknas med Herons formel

$$T^2 = p(p - a)(p - b)(p - c),$$

där $a = 5$, $b = 7$, $c = 8$ och $p = 10$ är hälften av triangelns omkrets. Vi får

$$T^2 = 10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 2^2 5^2 3,$$

så $T = 10\sqrt{3}$. Vi vet att $5h/2 = T$, så $h = 4\sqrt{3}$.

Svar: $4\sqrt{3}$.

3. En triangel har sidor av längd 3, 8 och 9. Bestäm radien i omskrivna cirkeln.

Om R är omskrivna cirkelns radie har vi formeln

$$R = \frac{abc}{4T},$$

där $a = 3$, $b = 8$ och $c = 9$ och T är triangelns area.

Enligt Herons formel är $T^2 = 10 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 1 = 2^2 \cdot 35$, så $T = 2\sqrt{35}$. Detta ger

$$R = \frac{3 \cdot 8 \cdot 9}{4 \cdot 2 \cdot \sqrt{35}} = \frac{27}{\sqrt{35}}.$$

Svar: $27/\sqrt{35}$.

4. Ange den geometriska betydelsen av ekvationen

$$x^2 + 4x = 2y^2 - 4y + 2.$$

(Eventuella brännpunkter, halvaxlar, medelpunkter, asymptoter etc ska anges.)

Kvadratkomplettering ger $(x+2)^2 - 4 = 2(y-1)^2$, eller $(x+2)^2 - 2(y-1)^2 = 4$. Division med 4 ger

$$\frac{(x+2)^2}{2^2} - \frac{(y-1)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

Detta är standrad ekvationen för en hyperbel. Vi kan avläsa $a = 2$, $b = \sqrt{2}$ och att $(-2, 1)$ är hyperbelns medelpunkt. Brännpunkterna ges av $(-2 \pm c, 1)$, där $c^2 = a^2 + b^2 = 6$, dvs $(-2 \pm \sqrt{6}, 1)$.

Asymptoterna ges av att vi löser

$$0 = \frac{(x+2)^2}{2^2} - \frac{(y-1)^2}{(\sqrt{2})^2} = (\frac{x+2}{2} - \frac{y-1}{\sqrt{2}})(\frac{x+2}{2} + \frac{y-1}{\sqrt{2}}).$$

Detta ger dels linjen $0 = x - \sqrt{2}y + 2 + \sqrt{2}$, dels linjen $0 = x + \sqrt{2}y + 2 - \sqrt{2}$, som alltså är asymptoterna.

Svar: En hyperbel med asymptoterna $x - \sqrt{2}y + 2 + \sqrt{2} = 0$ och $x + \sqrt{2}y + 2 - \sqrt{2} = 0$. Brännpunkterna är $(y - 2 \pm \sqrt{6}, 1)$ och $(-2, 1)$ är medelpunkt.

5. En linje tangerar en cirkel i A. Genom punkten P på tangenten, med $|AP| = 2$ dras en normal till tangenten. Den skär cirkeln (först) i B och $|PB| = 1$. Bestäm cirkelns radie.

Låt C vara normalens andra skärningspunkt med cirkeln. Kordasatsen ger då $|CP||BP| = |AP|^2$, dvs $|CP| = 4$. Cirkeln ifråga är omskrivna cirkeln till ΔABC. Vi har $R = abc/(4T)$, där $a = |CP| - |BP| = 3$, $b = |AC|$ och $c = |AB|$.

Eftersom ΔPBA är rätvinklig har vi enligt Pythagoras sats att

$$|AB| = \sqrt{|PA|^2 + |PB|^2} = \sqrt{5}.$$

Likaså är PCA rätvinklig vilket ger

$$|AC| = \sqrt{|PA|^2 + |PC|^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Vi kan beräkna arean som skillnaden mellan två rätvinkliga trianglars area:

$$T = \frac{2 \cdot 4}{2} - \frac{1 \cdot 2}{2} = 3$$

Detta ger till slut

$$R = \frac{3 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{12} = 5/2$$

6. Från en punkt A på en cirkel dras två kordor AB och AC. Bisektrisen till $\wedge BAC$ skär cirkeln i D. Visa att BCD är likbent.

7. (a) Hur ser ekvationen för en ellips med axlar parallella med koordinataxlarna ut?
   (b) Hur beräknar man halvaxlarna med hjälp av ekvationen?
   (c) Hur beräknar man brännpunkternas koordinater?

8. Formulera och bevisa en formel för radien till den i en triangel inskrivna cirkeln.

JAS