Repetition av cirklar, ellipser, hyperbler och parabler

1. Cirkeln

En cirkel består av alla punkter vars avstånd till en given punkt, *medelpunkten*, är ett givet tal, *radien*.

Ekvationen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

(där $r > 0$) är en ekvation för cirkeln med medelpunkt i (x_0, y_0) och radie r.

Uppgifter

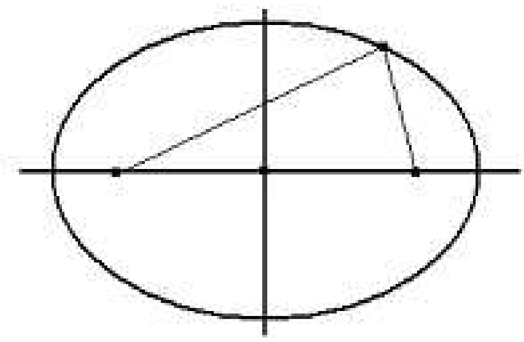
1.1 Bestäm en ekvation för cirkeln med medelpunkt i $(1, -2)$ och radie 3.

1.2 Bestäm en ekvation för cirkeln som går genom origo, $(0, 3)$ och $(2, 0)$.

2. Ellipsen

En ellips består av alla punkter vars sammanlagda avstånd till två givna punkter, *brännpunkterna*, är ett givet tal.

Mittpunkten till brännpunkterna kallas ellipsens *medelpunkt*. Linjen genom brännpunkterna (och medelpunkten) är *brännpunktsaxeln*. Den skär ellipsen i två punkter och sträckan mellan dem kallas *storaxeln*. Halva dess längd är *halva storaxeln* (och är en av *halvaxlarna*). Linjen genom medelpunkten som är normal till brännpunktsaxeln skär ellipsen i två punkter. Sträckan mellan dem är *lillaxeln*. Halva dess längd är *halva lillaxeln* (och är den andra av *halvaxlarna*).



Ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

(där a, $b > 0$) är en ekvation för ellipsen med medelpunkt i (x_0, y_0) med halvaxlarna a och b.

Om $a > b$ är $y = y_0$ brännpunktsaxeln. Brännpunkterna har koordinaterna $(x_0 \pm c, y_0)$, där $c^2 = a^2 - b^2$.

Om $a < b$ är $x = x_0$ brännpunktsaxeln. Brännpunkterna har koordinaterna $(x_0, y_0 \pm c)$, där $c^2 = b^2 - a^2$.

Om $a = b$ är det en ekvation för en cirkel med medelpunkt (x_0, y_0) och radie a.

Uppgifter

2.1 Ange den geometriska betydelsen av ekvationen

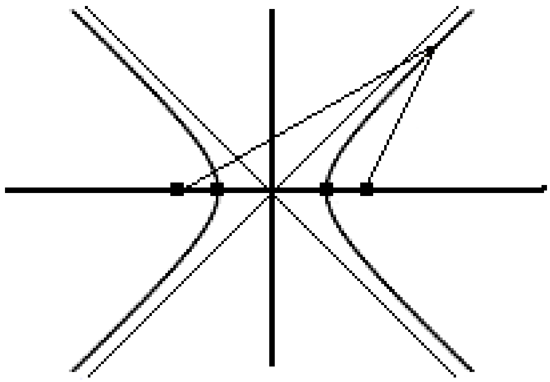
(a) $x^2 + 4y^2 - 2x - 3 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$
(c) $9x^2 + 25y^2 + 18x - 50y - 191 = 0$ (d) $4x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$.

3. Hyperbeln

En hyperbel består av alla punkter sådana att skillnaden mellan avstånden till två givna punkter, *brännpunkterna*, är ett givet tal.

Eftersom skillnaden mellan två avstånd tas på två sätt har hyperbeln två *grenar*.

Mittpunkten till brännpunkterna kallas *medelpunkten*. Linjen genom brännpunkterna kallas *brännpunktsaxeln* (eller *transversalaxeln*). Normalen till denna genom medelpunkten är *konjugataxeln*. Brännpunktsaxelns skärningspunkter med hyperbeln kallas *vertex*. Hyperbeln har sin *öppningar* i de två riktningar som ges av brännpunktsaxeln.



Ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

(där a, $b > 0$) är en ekvation för hyperbel med medelpunkt i (x_0, y_0) och brännpunktsaxeln $y = y_0$. Den har vertex i $(x_0 \pm a, y_0)$.

Brännpunkterna har koordinaterna $(x_0 \pm c, y_0)$, där $c^2 = a^2 + b^2$.

Den har *asymptoterna* $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$. De fås om man löser ekvationen

$$\mathbf{0} = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = (\frac{x - x_0}{a} - \frac{y - y_0}{b})(\frac{x - x_0}{a} + \frac{y - y_0}{b}).$$

Ekvationen

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

(där a, $b > 0$) är en ekvation för hyperbel med medelpunkt i (x_0, y_0) och brännpunktsaxeln $x = x_0$. Den har vertex i $(x_0, y_0 \pm a)$.

Brännpunkterna har koordinaterna $(x_0, y_0 \pm c)$, där $c^2 = a^2 + b^2$.

Den har *asymptoterna* $y - y_0 = \pm\frac{a}{b}(x - x_0)$.

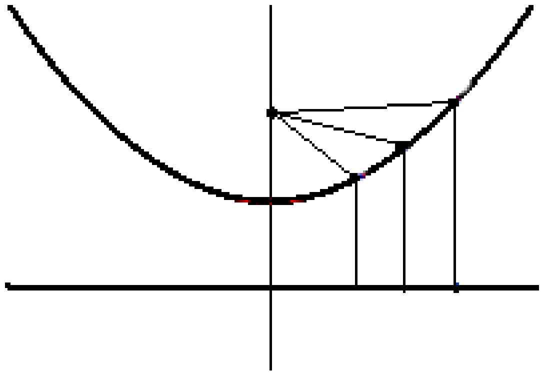
Uppgifter

3.1 Ange den geometriska betydelsen av ekvationen

(a) $9x^2 - y^2 + 36x + 4y + 23 = 0$ (b) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 36y - 56 = 0$
(c) $4y^2 - x^2 - 8y = 0$ (d) $y^2 - 4x^2 + 8x - 8 = 0$.

4. Parabeln

En parabel består av alla punkter som har samma avstånd till en given punkt, *brännpunkten*, som till en given linje, *styrlinjen*. Normalen till denna genom brännpunkten kallas prabelns *axel* (eller *symmetriaxel*). Axeln skär parabeln i dess *vertex*.



Ekvationen

$$y - y_0 = k(x - x_0)^2$$

är ekvation för en parabel med vertex i (x_0, y_0) och $x = x_0$ som axel.

Styrlinjen ges av $y = y_0 - b$ och brännpunkten av $(x_0, y_0 + b)$, där $b = 1/(4k)$.

Uppgifter

4.1 Ange den geometriska betydelsen av ekvationen

(a) $x^2 - 2x + 1 + 10x = 0$ (b) $4y^2 + 4y - 6x + 1 = 0$
(c) $y^2 - 6x - 6y - 3 = 0$ (d) $x^2 - 4x + 4y + 8 = 0$.

5. Linjer

Ekvationen

$$Ax + By + C = 0,$$

(där A och B inte båda är 0) beytder geometriskt en linje.

Om $B = 0$ är det linjen $x = -C/A$ som består av alla punkter med x-koordinaten $-C/A$.

Om $B \neq 0$ kan den skrivas $y = kx + m$, där $k = -A/B$ och $m = -C/B$. Här kallas k för linjens riktningskoefficient. Punkten $(0, m)$ är linjens skärningspunkt med y-axeln (där x-koordinaterna är 0).

En linje som är vinkelrät mot $y = kx + m$ har riktningskoefficienten $-1/k$. En linje som är parallell med $y = kx + m$ har riktningskoefficienten k.

Uppgifter

5.1

(a) Bestäm en ekvation för linjen genom punkterna $(1, 2)$ och $(5, 1)$
(b) Bestäm en ekvation för linjen genom $(2, -4)$ och $(-1, 3)$.

5.2

(a) Bestäm en ekvation för linjen som går genom $(-3, 4)$ och som är vinkelrät mot linjen genom punkterna $(1, 2)$ och $(5, 1)$
(b) Bestäm en ekvation för linjen som går genom $(-3, 4)$ och som är vinkelrät mot linjen genom $(2, -4)$ och $(-1, 3)$.

5.3

(a) Bestäm en ekvation för linjen som är parallell med $x - 2y = 3$ och går genom punkten $(3, -2)$
(b) Bestäm en ekvation för linjen som är parallell med $x + 5y = 3$ och går genom punkten $(-1, 5)$.

5.4

Bestäm skärningspunkten mellan linjerna

(a) $3x + 2y + 1 = 0$ och $2x - 4y + 3 = 0$ (b) $-3x + y - 2 = 0$ och $x - 2y + 1 = 0$
(c) $x + y + 4 = 0$ och $-x - 2y - 1 = 0$ (d) $2x - y + 3 = 0$ och $-2x + y - 2 = 0$.