Kortfattade lösningar
Geometri, MMG000, 20 maj 2010

1. Låt $h = |CP|$ och $x = |BC|$. Pythagoras sats ger $6^2 = 4^2 + h^2$, så $h^2 = 36 - 16 = 20$, och $x^2 = h^2 + 2^2 = 20 + 4 = 24$ och alltså $x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

   Svar: $x = 2\sqrt{6}$

2. Eftersom $|MC| = |MB|$ är $\wedge MCB = \wedge MBC$. Så $\wedge CMB = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$.

   Variant. Periferivinkelsatsen ger $\wedge AMC = 2\wedge ABC = 80°$. Så $\wedge CMB = 180° - 80° = 100°$.

   Svar: $100°$

3. Bisektrissatsen ger $\dfrac{|BC|}{|AB|} = \dfrac{3}{2}$. Så $|BC| = \frac{3}{2}|AB| = 12$.

   Svar: 12

4. Vi har

   $$P(x,y) = x^2+2x-9y^2+36y-44 = x^2+2x-9(y^2-4y)-44 = (x+1)^2-9(y-2)^2-9 \ .$$

   Så $P(x,y) = 0$ ger

   $$\frac{(x+1)^2}{3^2} - (y-2)^2 = 1 \ .$$

   Detta är en hyperbel med medelpunkt $(-1, 2)$, asymptoter $y = \pm\frac{1}{3}(x+1) + 2$ och brännpunkter $(-1 \pm c, 2)$ där $c^2 = 3^2 + 1^2 = 10$, dvs. $c = \sqrt{10}$.

5. Låt AH vara en sträcka med längden 4 och förläng AH till AG där AG har längd 8.

   Konstruera en mittpunktsnormal L till AG.

Drag en cirkel med radie 6 och medelpunkt i A. Den skär L i två punkter. Låt B vara en av dessa.

Drag en cirkel med radie 7 och medelpunkt i A. Den skär L i två punkter. Låt C vara den av dessa punkter så att H ligger mellan A och B.

ΔABC är den sökta triangeln.

6. $\wedge P$ och $\wedge QAD$ är likbelägna vinklar vid parallella linjer så $\wedge P = \wedge QAD$. På samma sätt är $\wedge Q = \wedge PAB$. Enligt VVV är därför ΔQAD och ΔAPB likformiga. Detta ger $\dfrac{|AB|}{|BP|} = \dfrac{|DQ|}{|AD|}$. Men $|AD| = |AB|$ och vi får $|AB|^2 = |BP||DQ|$.

7. Låt $x = |BP|$. Kordasatsen ger $|AP|^2 = |BP||CP|$ dvs. $64 = x(x+12)$. Detta ger $x = 4$ (och $x = -16$). Vi får $|PM| = 10$ och cosinussatsen på ΔAMP ger $6^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cos P$, så $\cos P = \frac{4}{5}$.

   Cossinussatsen på ΔABP ger nu $|AB|^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cos P = \frac{144}{5}$ och $|AB| = \frac{12}{\sqrt{5}}$.

   Svar: $|AB| = \frac{12}{\sqrt{5}}$

8. Se kurslitteraturen.