1. **a)** $x^2+2x+3=(x+2)^2-1+3=(x+1)^2+2$ **b)** $(x-\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2+1=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}$
c) $-3x^2+9x-12=-3(x^2-3x+4)=-3((x-\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2+4)=-3(x-\frac{3}{2})^2-\frac{21}{4}$

---

2. $\frac{1}{x+1}<\frac{2}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}<0\Leftrightarrow\frac{x-2(x-1)}{x(x+1)}<0\Leftrightarrow\frac{-(x+2)}{x(x+1)}<0$ Teckenstudietabell ger:

x		-2		-1		0	
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{-(x+2)}{x(x-1)}$	$+$	0	$-$	ξ	$+$	ξ	$-$

vilken ger svaret $-2<x<-1$ eller $x>0$.

---

3. **a)** $D(e^{x^2})=e^{x^2}D(x^2)=2xe^{x^2}$ **b)** $D(\frac{\sqrt{x^3+x}}{e^{2x}})=\frac{\frac{1}{2}((3x^2+1)/\sqrt{x^3+x})e^{2x}-\sqrt{x^3+x}2e^{2x}}{(e^{2x})^2}=\frac{-4x^3+3x^2-4x+1}{2e^{2x}\sqrt{x^3+x}}$
c) $D((\ln x)^{\ln x})=D(e^{\ln((\ln x)^{\ln x})})=D(e^{\ln x(\ln(\ln x))})=e^{\ln x(\ln(\ln x))}D(\ln x(\ln(\ln x)))=(\ln x)^{\ln x}(\frac{1}{x}\ln(\ln x)+\ln x\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x})=\frac{1}{x}(\ln x)^{\ln x}(\ln(\ln x)+1)$

---

4. **a)** $\int_1^2 xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{d}{dx}(e^{x^2})\,dx=\frac{1}{2}[e^{x^2}]_1^2=\frac{e}{2}(e^3-1)$ **b)** $\int\frac{1}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})+1}\,dx=[t=x/\sqrt{2},\ dt=(1/\sqrt{2})dx]=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}\sqrt{2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan t)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan\frac{x}{\sqrt{2}})+C$ **c)** $\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x-1}}=[t=\sqrt{x-1},\ x=t^2-1,\ dx=2t\,dt]=2\int\frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt=2\int\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}\,dt=\ln|t-1|+\ln|t+1|+C=\ln|\sqrt{x-1}-1|+\ln|\sqrt{x-1}+1|+C$ **d)** $\int\sin\sqrt{x}\,dx=[t=\sqrt{x},x=t^2]=\int 2t\sin t\,dt=[PI]=2(-t\cos t-\int-\cos t\cdot 1\,dt)=-2t\cos t+2\int\cos t\,dt=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$

---

5. **a)** $f(x)=\frac{x^2-1}{3(x+1)(x-1/3)}+\frac{1}{2(x+1)}=\cdots=\frac{2x+1}{2(3x-1)}$ för $x\neq-1$ och uttrycket $\to\frac{1}{8}$ då $x\to-1$. Alltså gäller att A$=\frac{1}{8}$ medför att f är kontinuerlig; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1/3\}$. **b)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}(1-4/x^2+19/x^3)}{\cancel{x^3}(2+1/x+1/x^2-1/x^3)}=\frac{1}{2}$
c) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}(1-5/e^x)}{8e^{3x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}(\frac{1-5/e^x}{8})=0\cdot\frac{1}{8}=0$ **d)** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=(\ell\text{'Hospital})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}$

---

6. $p(x)=(x-5)(x-6)=x^2-11x+30=(x-\frac{11}{2})^2-(\frac{11}{2})^2+30=(x-\frac{11}{2})^2+\frac{-121+120}{4}=(x-\frac{11}{2})^2-\frac{1}{4}\geq-\frac{1}{4}$ som är minimum.

---

7. **a)** Ekvationen är 1:a ordningens linjär med IF: $e^{\int\frac{2}{x+1}\,dx}=e^{2\ln|x+1|}=(x+1)^2$. Detta ger $D((x+1)^2y)=(x+1)^4\Rightarrow(x+1)^2y=\int\frac{d}{dx}((x+1)^2y)\,dx=\int(x+1)^4\,dx=\frac{1}{5}(x+1)^5+C\Rightarrow y=\frac{1}{5}(x+1)^3+C(x+1)^{-2}$
b) Ekvationen är separabel och $\Leftrightarrow\frac{1}{y}dy=\frac{2}{x}dx$ eller $y=0$, som vi genom insättning ser är en lösning. Nu gäller $\int\frac{1}{y}\,dy=\int\frac{2}{x}dx\Rightarrow\ln|y|=2\ln|x|+C_1=\ln x^2+\ln C_2$ där $C_2>0$ så att $\ln|y|=\ln(C_2x^2)\Rightarrow|y|=C_2x^2\Rightarrow y=\pm C_2x^2=Cx^2$ där $C\neq 0$; men då ju $y=0$ är en lösning gäller att $y=Cx^2,\quad C\in\mathbb{R}$. Dessutom kan lösningarna 'skarvas' i $x=0$ ty där gäller att $y(0)=y'(0)=0$ så lösningar med olika konstanter sammanfaller där och detsamma gäller för deras tangenter. Alltså ges alla lösningar av beskrivningen i uppgiften.

---

8. Derivera ger att $y'=\frac{1}{4}2xy(\frac{2x}{2})=\frac{1}{2}xy(x)\Rightarrow y'-\frac{1}{2}xy=0\Rightarrow\frac{d}{dx}(e^{-x^2/4}y)=0\Rightarrow y=Ce^{x^2/4}$ och från integralekvationen fås att $y(0)=1$ så att sökt lösning är $y=e^{x^2/4}$.
