1. **a)** $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{x^2-y^2}{(xy)^2}} = \dfrac{y-x}{xy}\dfrac{(xy)^2}{(x-y)(x+y)} = -\dfrac{xy}{x+y}$ **b)** $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2} = \dfrac{\frac{x^2-y^2}{xy}}{\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}} = \dfrac{\frac{x^2-y^2}{xy}}{\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}}\dfrac{xy}{xy} = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2-2xy} = \dfrac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2} = \dfrac{x+y}{x-y}$ **c)** $\dfrac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}} = \dfrac{\frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}}{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)}} = \dfrac{\frac{2x}{(x+1)(x-1)}}{\frac{2}{(x+1)(x-1)}} = \dfrac{\frac{2x}{(x+1)(x-1)}}{\frac{2}{(x+1)(x-1)}}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{\frac{2x}{1}}{\frac{2}{1}} = \frac{2x}{2} = x$

---

2. **a)** $\frac{2x^2}{x+2} < x-2 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x+2} - (x-2) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-(x+2)(x-2)}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-(x^2-4)}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{x+2} < 0 \Leftrightarrow x+2<0 \Leftrightarrow x < -2$ **b)** $\frac{1-x^4}{1-(x^2+1)^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-x^4}{1-(x^2+1)^2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^4-(1-(x^2+1)^2)}{1-(x^2+1)^2} < 0 \Leftrightarrow -\frac{2x^2+1}{x^2(x^2+2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+2)} > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

---

3. **a)** Funktionen f är *kontinuerlig* om för varje a i definitionsmängden för f gäller att $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. OBS. Vi har då också att $f(a) = f(\lim_{x\to a})$ så att kontinuitet kan sägas innebära att man 'flyttar in gränsprocessen i argumentet'. **b)** Funktionen f är *deriverbar* om för varje inre x i definitionsmängden för f gäller att gränsvärdet $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existerar.

---

4. **a)** $x = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow x-2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^2-4x+4 = (\sqrt{x})^2 = x \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 1,\ 4.$ Vi ser att $0 \le \sqrt{x} = x-2 < 0$ för $x=1$ så endast $x=4$ är en rot till den ursprungliga ekvationen. **b)** $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x\cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$. Alltså gäller $\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + \frac{3}{2}\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -2,\ \frac{1}{2}$. Det gäller att $\cos x = -2$ ej har ngn lösning och $\cos x = 1/2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + n2\pi$.

---

5. **a)** $D(\cos x^3) = -\sin(x^3)D(x^3) = -3x^2\sin(x^3)$ **b)** $D(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}2x = \frac{1}{x(1+x^2)}$ **c)** $D(\tan\sin x^2) = (1/\cos^2(\sin x^2))D(\sin x^2) = (1/\cos^2(\sin x^2))(\cos x^2)D(x^2) = = (1/\cos^2(\sin x^2))(\cos x^2)2x = \frac{2x\cos x^2}{\cos^2(\sin x^2)}$ **d)** $D((1+\cos x)^{1/x}) = D(e^{(\ln(1+\cos x)^{1/x})}) = D(e^{(\ln(1+\cos x))/x}) = e^{(\ln(1+\cos x))/x}D((\ln(1+\cos x))/x) = (1+\cos x)^{1/x}D((\ln(1+\cos x))/x) = (1+\cos x)^{1/x}[(1/(1+\cos x))D(1+\cos x)x - \ln((1+\cos x))]/x^2 = (1+\cos x)^{1/x}[(1/(1+\cos x))(-\sin x)x - \ln(1+\cos x)]/x^2 = -(1+\cos x)^{1/x}[x\sin x + (1+\cos x)\ln(1+\cos x)]/(x^2(1+\cos x))$

---

6. **a)** $\int x^{3/2}\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + C$ **b)** $\int xe^x\,dx = \int \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}e^{x^2})\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$ **c)** $\int x\sqrt{x+1}\,dx = [t = x+1,\ dt = dx] = \int (t-1)\sqrt{t}\,dt = \frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$ **d)** $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = [t=\sqrt{x},\ x = t^2,\ dx = 2tdt] = 2\int te^t\,dt = [PI] = 2(te^t - \int e^t\,dt) = 2(te^t - e^t) + C = 2(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + C$

---

7. Ekvationen är både linjär och separabel; vi löser den som linjär. IF: $e^{\int x^2\,dx} = e^{x^3/3} \Rightarrow e^{x^3/3}y = = \int \frac{d}{dx}(e^{x^3/3}y)\,dx = \int x^2 e^{x^3/3}\,dx = \int \frac{d}{dx}(e^{x^3/3})\,dx = e^{x^3/3} + C \Leftrightarrow y = 1 + Ce^{-x^3/3}$. Begynnelsevillkoret ger att $2 = y(0) = 1 + Ce^{-0^3/3} = 1 + C \Rightarrow C = 1$. Alltså är sökt lösning $y = 1 + e^{-x^3/3}$.

---

8. Se kursboken för ett bevis av analysens huvudsats.
