1. $-5x^2+15x-25 = -5(x^2-3x+5) = -5(x^2+2(-\frac{3}{2})x+5) = -5((x-\frac{3}{2})^2-(-\frac{3}{2})^2+5) = -5((x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+\frac{20}{4}) = -5((x-\frac{3}{2})^2+\frac{11}{4}) = -5(x-\frac{3}{2})^2-\frac{55}{4} \le -\frac{55}{4}$ så största värdet är $-\frac{55}{4}$ som antas för $\frac{3}{2}$.

---

2. $x+3 \ge \frac{2x}{x-2} \Leftrightarrow x+3-\frac{2x}{x-2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-2)-2x}{x-2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{x-2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-3)}{x-2} \ge 0$ Teckenstudietabell ger:

x		-2		2		3	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{(x+2)(x-3)}{x-2}$	$-$	0	$+$	ej def	$-$	0	$+$

vilken ger svaret $-2 \le x < 2$ eller $x \ge 3$.

---

3. **a)** $\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}(6-1/x^2)(5+1/x)}{\cancel{x^3}(15-1/x^2+1/x^3)} = 2$ **b)** $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{1} =$
$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+1/x^2}+|x|\sqrt{1-1/x+1/x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+1/x^2}+\sqrt{1-1/x+1/x^2})} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
c) $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)(x+\frac{1}{3})}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{3(x+\frac{1}{3})}{x+2} = \frac{7}{4}$ **d)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = (\ell' Hospital) = \lim_{x\to 0} \frac{sin}{2x} =$
$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{sin}{x} = \frac{1}{2}$

---

4. **a)** $D(x\ln x) = 1\cdot \ln x + x\frac{1}{x} = 1+\ln x$ **b)** $D(\frac{\tan x}{e^{3x^2}}) = \frac{(1+\tan^2 x)e^{3x^2}-(\tan x)6xe^{3x^2}}{(e^{3x^2})^2} = \frac{(\tan^2 x-6x\tan x+1)e^{3x^2}}{(e^{3x^2})^2} =$
$\frac{\tan^2 x-6x\tan x+1}{e^{3x^2}}$ **c)** $D(\tan\sin x^2) = (1/\cos^2(\sin x^2))D(\sin x^2) = (1/\cos^2(\sin x^2))(\cos x^2)D(x^2) =$
$= (1/\cos^2(\sin x^2))(\cos x^2)2x = \frac{2x\cos x^2}{\cos^2(\sin x^2)}$ **d)** $D(x^{\cos x}) = D(e^{\ln(x^{\cos x})}) = D(e^{\cos x\ln(x)}) =$
$= e^{\cos x\ln(x)}D(\cos x\ln(x)) = x^{\cos x}(-\sin x\ln x+(\cos x)\frac{1}{x})$

---

5. **a)** $\int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx = \int_0^1 \frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-3)}\,dx = \int_0^1 \frac{-1}{(x-2)}+\frac{1}{(x-3)}\,dx = [-\ln|x-2|+\ln|x-3|]_0^1 =$
$-\ln 1+\ln 2-(-\ln 2+\ln 3) = 2\ln 2-\ln 3$ **b)** $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = [t=\cos x,\ dt=-\sin x\,dx] = -\int \frac{1}{1+t^2}\,dt =$
$-\arctan t+C = -\arctan(\cos x)+C$

---

6. **a)** 1:a ordningens linjär ODE. IF: $e^{\int a\,dx} = e^{ax} \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{ax}y) = c_0e^{ax} \Rightarrow e^{ax}y = \int \frac{d}{dx}(e^{ax}y)\,dx = \int c_0e^{ax}\,dx =$
$\frac{c_0}{a}e^{ax}+C$. Vi får alltså att $y = \frac{c_0}{a}+Ce^{-ax}$. **b)** Separabel ODE. $\frac{dy}{dx} = 2xy^2 \Rightarrow \frac{1}{y^2}\,dy = 2x\,dx$ eller $y=0$. Vi ser att $y=0$ är en (potentiellt) singulär lösning. Om $y\neq 0$ har vi att $-\frac{1}{y} = \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 2x\,dx = x^2+C \Rightarrow$
$y = -\frac{1}{x^2+C}$ där $C\in\mathbb{R}$. Vi ser från detta att $y=0$ ej kan inkluderas i den allmänna lösningen så $y=0$ är en *singulär* lösning.

---

7. $D_f = \{x\in\mathbb{R} : \frac{x+1}{x} > 0\} = (-\infty,-1)\cup(0,\infty)$. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x(x+1)(x^2+1)}$ Teckenstudietabell ger:

x		-1		0		1	
f'	$-$	ξ	ξ	ξ	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	ξ	ξ	ξ	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}+\ln 2$	$\nearrow$

Det gäller att $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ så att $x=-1$ och $x=0$ är lodräta asymptoter. Vidare är $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\pi/2$ så $y=\pi/2$ och $y=-\pi/2$ vågräta asymptoter. Då $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$ finns ingen sned asymptot. Det är nu lätt att rita grafen.

---

8. $\frac{d}{dx}(\int_a^x f(t)\,dt) =$ (enl. derivatans definition) $= \lim_{h\to 0}(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt)/h = \lim_{h\to 0}(\int_x^{x+h} f(t)\,dt)/h$
$=$(enl. integralkalkylens medelvärdessats)$=\lim_{h\to 0}(f(\xi(h))(x+h-x)/h =$($\xi(h)$ ligger mellan $x+h$ och x)$=\lim_{h\to 0} f(\xi(h)) =$(ty f kont.)$=$
$= f(\lim_{h\to 0}\xi(h)) =$(ty ξ ligger mellan x och $x+h$)$= f(x)$. Vidare: $\frac{d}{dx}(\int_a^x f(t)\,dt - F(x))) = 0$ så $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)+C$ och insättning av $x=a$ resp $x=b$ ger $\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$.