Matematik Introduktionskurs MMG010, 100828

1a) $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{6+4+3}{12}=\frac{13}{12} \Rightarrow x=\frac{12}{13}$ b) $(4711)^2-(3711)^2=(4711-3711)(4711+3711)=1000\cdot 8422=8422000$

c) $\cos(2010°)=\cos(5\cdot 360°+210°)=\cos(210°)=\cos(180°+30°)=-\cos(30°)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $(3x-2y)^5=$

$=(3x)^5-5(3x)^4 2y+10(3x)^3(2x)^2-10(3x)^2(2y)^3+5(3y)(2y)^4-(2y)^5 \Rightarrow$ koeff. för x^3y^2 är

$10\cdot 3^3\cdot 2^2=1080$

2a) $9e^{2x}+3e^x-2=0 \Leftrightarrow z^2+\frac{z}{3}-\frac{2}{9}=0$ där $z=e^x \Rightarrow z_{1,2}=\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}$ (ej möjligt för $z=e^x>0$)

$\therefore e^x=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\ln e^x=\ln\frac{1}{3}=\ln 1-\ln 3=0-\ln 3=-\ln 3$ b) $\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}<0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}}_{=f(x)}<0$

Teckentabell

x		-1		1	
$f(x)$	$+$	ξ	$-$	ξ	$+$

$\Rightarrow \underline{-1<x<1}$

3)a) $x^2+y^2=ax+by+c$ och $(x,y)=(1,1),(2,3)$ respektive $(5,1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} a+b+c=1+1 \\ 2a+3b+c=4+9 \\ 5a+b+c=25+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=2 \\ a+2b=11 \\ 4a=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=5/2 \\ c=-13/2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=6x+\frac{5y}{2}-\frac{13}{2}$$

b) $x^2-6x+9+y^2-\frac{5y}{2}+\frac{25}{16}=9+\frac{25}{16}-\frac{13}{2} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-\frac{5}{4})^2=\frac{65}{16} \Rightarrow$ medelpunkt $=(3,\frac{5}{4})$, radie $=\frac{\sqrt{65}}{4}$

4)a) $\begin{cases} x+2y=3 & (-4) \\ 4x+5y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ -3y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y=3 & (-4) \\ 4x+py=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ (p-8)y=q-12 \end{cases}$ ∴ Om $p-8\neq 0$ så finns entydig lösning

$x=\frac{3p-2q}{p-8}$, $y=\frac{q-12}{p-8}$ Om $p=8$ så saknas lösning om $q-12\neq 0$, men om $q=12$ så

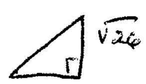
finns oändligt många lösningar; där $-\infty<x<\infty$ och $y=\frac{1}{2}(3-x)$

5)a) $\cos(3v)=\cos(2v+v)=\cos 2v\cos v-\sin(2v)\sin v=(\cos^2 v-\sin^2 v)\cos v-2\sin v\cos v\sin v=$

$=(2\cos^2 v-1)\cos v-2\cos v(1-\cos^2 v)=2\cos^3 v-\cos v-2\cos v+2\cos^3 v=4\cos^3 v-3\cos v$

b) Sätt $v=\frac{\alpha}{3}$ ∴ $\cos\alpha=\cos(3v)=$ (enl. a)) $=4\cos^3 v-3\cos v=4\cos^3(\frac{\alpha}{3})-3\cos\frac{\alpha}{3}=$

$=4\left(\frac{A}{2\sqrt{3}}\right)^3-3\frac{A}{2\sqrt{3}}=\frac{4A^3}{8\cdot 3\sqrt{3}}-\frac{3A}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{6\sqrt{3}}(A^3-9A)$ Vidare gäller $\tan\alpha=\sqrt{26}=\frac{\sqrt{26}}{1} \Rightarrow$

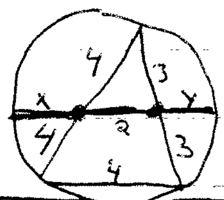
$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ hypotenusa har längd $=\sqrt{(\sqrt{26})^2+1}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ ∴ $\cos\alpha=\frac{1}{3\sqrt{3}}$

∴ $A^3-9A=6\sqrt{3}\cos\alpha=6\sqrt{3}/3\sqrt{3}=2$

(6) Cirkelkordans längd $=x+2+y$

Kordasatsen (eller likformiga trianglar) ger



$$\begin{cases} x(y+2)=4\cdot 4 \\ (x+2)y=3\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+2x=16 \\ xy+2y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+2x=16 \\ x=y+\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow y^2+\frac{11}{2}y-9=0$$

$\Leftrightarrow y=-\frac{11}{4}\pm\sqrt{\frac{121}{16}+9}=\frac{\sqrt{265}-11}{4}$

∴ $x=\frac{\sqrt{265}-11}{4}+\frac{7}{2}=\frac{\sqrt{265}+3}{4}$ Då är kordans längd $L=$

$=x+2+y=\frac{\sqrt{265}}{2}$