Förberedande kurs i matematik

vid Chalmers tekniska högskola

Rolf Petterson

Göteborg 2014

Innehåll

Kapitel 1

Algebraiska räkningar

1.1 Addition, subtraktion och multiplikation av (reella) tal

För reella tal gäller bl.a. följande enkla räkneregler, som man väl använder utan att speciellt tänka på dem:

(kommutativa lagar) $\quad a+b=b+a \quad$ och $\quad a \cdot b = b \cdot a = ab$,

(associativa lagar) $\quad (a+b)+c = a+(b+c)$ och $(ab)\cdot c = a\cdot(bc)$,

(distributiva lagen) $\quad a(b+c) = ab+ac$, varav $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$.

Vidare är $1\cdot a = a = +a, (-1)\cdot a = -a = +(-a), (-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -ab$, $(-a)(-b) = +ab = ab$, ty $(-1)\cdot(-1) = +1$, samt $-(a+b) = -a-b$ och $-(a-b) = -a+b = b-a$.

<u>Potenser</u> med heltalsexponenter definieras:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^0 = 1 \text{ (för } a \neq 0), \quad a^1 = a, \quad a^2 = a\cdot a, \ldots, \\ a^n = a\cdot a \cdots a \text{ (produkten av } n \text{ stycken faktorer a),} \end{array}}$$

varav följer **potenslagarna**:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (ab)^n = a^n \cdot b^n \quad \text{och} \quad (a^n)^m = a^{n\cdot m}.}$$

Då $(-1)^2 = 1$, gäller att: $(-a)^1 = -a$, $(-a)^2 = a^2$, $(-a)^3 = -a^3$ och allmänt

$$(-a)^n = \begin{cases} +a^n & \text{om} \quad n = 2m = \text{jämnt heltal} \\ -a^n & \text{om} \quad n = 2m+1 = \text{udda heltal.} \end{cases}$$

Exempel: Med räknereglerna ovan kan man förenkla en del algebraiska uttryck:

<u>a</u>) $10m - 9y + 5y + 7m + 4y - m = (10+7-1)m + (-9+5+4)y = 16m + 0\cdot y = 16m$

<u>b</u>) $m - [a-b-(c-m)] = m - [a-b-c+m] = m-a+b+c-m = b+c-a$

c) $3abc \cdot a^3bc^2 \cdot (-4b^2) = 3 \cdot (-4) \cdot a \cdot a^3 \cdot b \cdot b \cdot b^2 \cdot c \cdot c^2 = -12a^4b^4c^3$

d) $(3x^2y^3z)^4 = 3^4 \cdot (x^2)^4 \cdot (y^3)^4 \cdot z^4 = 81 \cdot x^8 \cdot y^{12} \cdot z^4$

e) $(2x+3)(4x^2-6x+9) = 2x \cdot 4x^2 + 2x \cdot (-6x) + 2x \cdot 9 + 3 \cdot 4x^2 + 3 \cdot (-6x) + 3 \cdot 9 =$
$= 8x^3 - 12x^2 + 18x + 12x^2 - 18x + 27 = 8x^3 + 27$

Övningsexempel:

Ö1. Förenka a) $10t - 14u + 7v - t - 8v + 14u - 8v - u$

b) $70a + 20c + 33x + c - x - 28a - 40a - 9c + 41x$

Ö2. Förenkla a) $m + 2p - (m + p - r)$ b) $3c - (2a + c - 5b) - (2b - 2a)$

c) $7a - 2b - [(3a - c) - (2b - 3c)]$

Ö3. Beräkna a) 5^2 b) 2^5 c) $(-3)^4$ d) $(-4)^3$ e) 1^{100} f) 100^1 g) 3^0

h) $(-3)^0$

Ö4. Förenkla a) $2xz^7 \cdot 10xz$ b) $a^2b^4c \cdot (-3ac^2) \cdot 9abc$

c) $-2p^2qr \cdot pq^7s^2 \cdot (-7qr^3)$

Ö5. Förenkla a) $(3x^2y)^3$ b) $(4ab^2c^3)^2 \cdot (-2a^2b)^3$

c) $(a^2)^p \cdot (a^pb^{3p})^2 \cdot b^p$

Ö6. Omforma (genom att multiplicera ihop paranteserna)
a) $(2x - y)(x + 2y)$ b) $(2x - y)(x + 2y)(x - y)$

c) $(a + x)(a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3 + x^4)$ d) $(x^2 - 2x + 3)(2 - 3x - 2x^2)$

Följande viktiga formler bör man kunna utantill:

kvadreringsreglerna:
$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (b-a)^2 \end{cases}$$

kuberingsreglerna:
$$\begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$$

konjugatregeln:
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$$

faktoruppdelningarna:
$$\begin{cases} a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{cases}$$

OBS: $a^2 + b^2$ (liksom $a^2 + ab + b^2$ och $a^2 - ab + b^2$) kan ej faktoruppdelas (med reella tal).

En generalisering av formeln för $a^3 - b^3$ är allmänna konjugatregeln.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \cdots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

som visas genom ihopmultiplicering av parenteserna i högra ledet.

Exempel: a) $(3a+4b)^2 =$ (kvadreringsregeln) $= (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 4b + (4b)^2 = 9a^2 + 24ab + 16b^2$

b) $(3 + x^2)(x^2 - 3) = (x^2 + 3)(x^2 - 3) =$ (konjugatregeln) $= (x^2)^2 - 3^2 = x^4 - 9$

c) $(x - 2y)^3 =$ (kuberingsregeln) $= x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 =$
$x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

d) Faktoruppdelning: $4x^2 - 9a^4 = (2x)^2 - (3a^2)^2 =$ (konjugatregeln) $=$
$= (2x + 3a^2)(2x - 3a^2)$

e) Faktoruppdelning: $12x^4 - 2x^5 - 18x^3 =$ (alla gemensamma faktorer brytes ut) $=$
$= 2x^3 \cdot (6x - x^2 - 9) = -2x^3(x^2 - 6x + 9) = -2x^3 \cdot (x-3)^2$

f) Faktoruppdelning: $x^4 + 8xy^6 = x \cdot (x^3 + 8y^6) = x \cdot [x^3 + (2y^2)^3] =$
$=$ (enligt formeln för $a^3 + b^3$) $= x \cdot (x + 2y^2)[x^2 - x \cdot 2y^2 + (2y^2)^2] =$
$= x \cdot (x + 2y^2)(x^2 - 2xy^2 + 4y^4)$

Ö7. Utveckla a) $(3a - 4b)^2$ b) $(a^3 + 2b^2)^2$ c) $(m^4 + 4)^2 + (m^4 - 4)^2$

Ö8. Förenkla a) $(6 - x)(x + 6)$ b) $(a^2 + y)(a^2 - y)$ c) $(x^3 + 3)(x^3 - 3)(x^6 + 9)$

Ö9. Utveckla a) $(y + 3x)^3$ b) $(3x + 2y^2)^3$ c) $(x^4 - 6x)^3$

Ö10. Uppdela i faktorer a) $x^2 - a^4$ b) $9x^4 - 25x^2$ c) $18x + 81 + x^2$

d) $x^4y + 4x^2y^3 - 4x^3y^2$ e) $x^4 - x$ f) $3a^3 + 81b^3$ g) $x^2 - x^6$ h) $54x^2y^7 - 16x^5y$

Med **polynom** (i x) menas uttryck av formen $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ där $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ och a_0 kallas koefficienter för $x^n, x^{n-1}, \ldots, x$ resp. $x^0 (= 1)$. Om $a_n \neq 0$ så säges $p(x)$ vara av graden n.

Exempel: Kvadratkomplettering (i andragradspolynom)

$x^2 - 6x + 11 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 11 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 11 =$ (kvadreringsregeln) $=$
$= (x-3)^2 - 9 + 11 = (x-3)^2 + 2$. (Om man sätter $x - 3 = t$, så fås ett uttryck $t^2 + 2$ utan t-term, dvs utan förstagradsterm).

Exempel: Bestäm största värdet av $f(x) = 12x - 2x^2 - 22$.

Lösning: $f(x) = 12x - 2x^2 - 22 =$ (bryt ut koefficienten för x^2) $= -2(x^2 - 6x + 11) =$
$=$ (kvadratkomplettera) $= -2[(x-3)^2 + 2] = -2(x-3)^2 - 4$. Då $(x-3)^2 \geq 0$ för alla reella x, så antar $f(x) = -2(x-3)^2 - 4$ sitt *största värde* $= -4$ *för* $x = 3$.

Ö11. Kvadratkomplettera a) x^2+4x+1 b) $4x^2-36x+100$ c) $3-12x-x^2$

Ö12. Bestäm minsta värdet av a) x^2+2x b) $3x^2-2x+1$ c) x^4-8x^2+1

d) x^4+8x^2+1

Ö13. Bestäm största värdet av a) $7-x^2+4x$ b) $x+1-5x^2$

Koefficienterna i utvecklingen av $(a+b)^n$ kan bestämmas med hjälp av **Pascals triangel**:

$$\begin{array}{r ccccccccccc l}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \text{o.s.v.}
\end{array}$$

Ett tal i triangeln erhålles genom addition av de två tal, som står närmast snett ovanför.

Exempel: a) $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ b) $(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$
c) $(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

Ö14. Utveckla a) $(x-1)^5$ b) $(1-y)^7$ c) $(2x+a^2)^5$ d) $(xy^2-3z)^6$

1.2 Division av (reella) tal. Bråkräkning

Med bråket $x=\frac{a}{b}=a/b=a:b$ menas det (reella) tal, som satisfierar ekvationen $b\cdot x=a$, om $b\neq 0$. För bråkräkning gäller bl.a. följande enkla regler:

(förkortning och förlängning) $\dfrac{c\cdot a}{c\cdot b}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot c}$ (för $c\neq 0$)

(multiplikation) $a\cdot\dfrac{b}{c}=\dfrac{ab}{c},\quad \dfrac{a}{b}\cdot c=\dfrac{ac}{b},\quad \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd},$

(division; dubbelbråk) $\dfrac{a/b}{c/d}=\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$

(addition och subtraktion) $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c},\quad \dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{c}=\dfrac{a-b}{c}$

varav följer

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

OBS: $\dfrac{1}{a+b}$ är ej lika med $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

(Alltför vanligt teknologfel att tro motsatsen). Om t.ex. $a = b = 1$, så är nämligen $\dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{2}$ medan $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 2$. Ej heller är (i allmänhet) $\dfrac{a}{b}$ lika med $\dfrac{a+c}{b+c}$. (Giv exempel!)

Potenser med *negativa exponenter* definieras:

$$a^{-1} = \frac{1}{a},\ a^{-2} = \frac{1}{a^2}, \ldots, a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \text{varav följer}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Exempel: a) $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{(-a)\cdot(-1)}{b\cdot(-1)} = \dfrac{a}{-b}$, varav följer att $-\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{-(a-b)}{c} = \dfrac{-a+b}{c} = \dfrac{b-a}{c}$ och $-\dfrac{a}{b-c} = \dfrac{a}{-(b-c)} = \dfrac{a}{c-b}$

b) $\dfrac{30x^4y^7}{12xy^{10}} = \dfrac{2\cdot 3\cdot 5\cdot x^{4-1}}{2\cdot 2\cdot 3\cdot y^{10-7}} = \dfrac{5x^3}{2y^3} = 2{,}5\cdot x^3\cdot y^{-3}$

c) (förenkla) $\dfrac{x-y}{xy-x^2} = \dfrac{x-y}{x(y-x)} = -\dfrac{y-x}{x(y-x)} = -\dfrac{1}{x}$

d) (förenkla) $\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + 2\right) : \left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{b}{a^2}\right) = \dfrac{(a^2+b^2+2ab)}{ab} : \dfrac{(a^2-b^2)}{a^2b} =$
$= \dfrac{(a^2+b^2+2ab)\cdot a^2b}{ab\cdot(a^2-b^2)} = \dfrac{(a+b)^2\cdot a}{(a+b)(a-b)} = \dfrac{(a+b)a}{a-b}$

e) (förenkla) $\dfrac{5}{2x-2} - \dfrac{1}{3x} + \dfrac{3x+1}{1-x^2} =$ (faktoruppdela nämnarna) $=$
$= \dfrac{5}{2(x-1)} - \dfrac{1}{3x} - \dfrac{3x+1}{(x+1)(x-1)} =$ (minsta gemensamma nämnare är $2\cdot 3\cdot x\cdot(x+1)(x-1)$) $= \dfrac{5\cdot 3x(x+1)}{2(x-1)\cdot 3x(x+1)} - \dfrac{1\cdot 2(x+1)(x-1)}{3x\cdot 2(x+1)(x-1)} - \dfrac{(3x+1)\cdot 2\cdot 3x}{(x+1)(x-1)\cdot 2\cdot 3x} =$
$= \dfrac{(15x^2+15x)-(2x^2-2)-(18x^2+6x)}{2\cdot 3\cdot x(x+1)(x-1)} = \dfrac{-5x^2+9x+2}{6x(x^2-1)} = -\dfrac{5x^2-9x-2}{6(x^3-x)}$

Ö15. Beräkna a) $\dfrac{1}{4} - \left(1\dfrac{1}{3} - 2\dfrac{1}{6}\right)$ b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right)$

Ö16. Beräkna a) 2^{-2} b) $(-3)^{-3}$ c) 1^{-5}

Ö17. Skriv som potenser av 2 $\underline{\text{a}}$) $1/64$ $\underline{\text{b}}$) $16^3/2^{10}$ $\underline{\text{c}}$) $128^3/32^5$

Ö18. Förenkla $\underline{\text{a}}$) $\dfrac{6a^7b^3c}{16ab^3c^3}$ $\underline{\text{b}}$) $\dfrac{32x^ny^p}{36x^{n+1}y^{p-1}}$ $\underline{\text{c}}$) $\dfrac{2ay+y^2}{2ay}$

$\underline{\text{d}}$) $\dfrac{12x^2y^2+20xy^2-8x^2y}{4xy}$

Ö19. Förenkla $\underline{\text{a}}$) $(2a+2b)/(b^2-a^2)$ $\underline{\text{b}}$) $(x^2-4x^4)/(4x^2-4x+1)$

$\underline{\text{c}}$) $(x-y)^3/(y-x)^5$ $\underline{\text{d}}$) $(b^8-9)/(b^8-6b^4+9)$ $\underline{\text{e}}$) $(a^3-b^3)/(b-a)^2$

$\underline{\text{f}}$) $(a^3+1)/(a-a^2+a^3)$ $\underline{\text{g}}$) $(x^4-16)/((x+2)(x^3-8))$

Ö20. Förkorta (om möjligt) $\underline{\text{a}}$) $(a^3+b^3)/(a+b)$ $\underline{\text{b}}$) $(a^4-b^4)/(a-b)$

$\underline{\text{c}}$) $(a^4+b^4)/(a+b)$ $\underline{\text{d}}$) $(a^5-b^5)/(b-a)$

Ö21. Förenkla $\underline{\text{a}}$) $\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{y^2}{x}\right):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y^2}\right)$ $\underline{\text{b}}$) $\left(1-\dfrac{1}{x^4}\right)/\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)$

$\underline{\text{c}}$) $\left[\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right]:\left[\dfrac{x+y}{x-y}-2+\dfrac{x-y}{x+y}\right]$ $\underline{\text{d}}$) $\left[\dfrac{1/a}{b}-\dfrac{1/b}{a}+\dfrac{1}{2b/a}+\dfrac{2}{a/b}\right]:\left[\dfrac{a^2+4b^2}{ab}\right]$

Ö22. Skriv som ett bråk (på så enkel form som möjligt)

$\underline{\text{a}}$) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x}$ $\underline{\text{b}}$) $1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x^2-4x}$ $\underline{\text{c}}$) $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{1-x^2}$

$\underline{\text{d}}$) $\dfrac{1}{x^3-8}+\dfrac{1}{2x^2-8}+\dfrac{1}{8-4x}$

Enligt definitionen på (reellt) bråk har <u>förstagradsekvationen</u> $bx=a$ den entydigt bestämda lösningen $x=\dfrac{a}{b}$ för $b\neq 0$.

Exempel: Lös ekvationen $\dfrac{5x+7}{4x-14}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{3x+11}{2x-7}$

Lösning: Multiplikation med minsta gemensamma nämnaren $6(2x-7)\neq 0$ ger ekvationen $3(5x+7)-2(2x-7)=6(3x+11)$ d.v.s. $15x+21-4x+14=18x+66$ eller $(15-4-18)x=66-21-14$ d.v.s. $-7x=31$ med $\underline{\text{lösning } x=-\dfrac{31}{7}=-4\dfrac{3}{7}}$

Ö23. Lös ekvationen $\underline{\text{a}}$) $\dfrac{3x}{7}=2\dfrac{1}{13}$ $\underline{\text{b}}$) $\dfrac{25x-0{,}05}{0{,}4}-\dfrac{0{,}5+10x}{2}=0{,}2$

$\underline{\text{c}}$) $\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{x}{x^2-9}+\dfrac{1}{6-2x}=\dfrac{5}{2(x+3)}$ $\underline{\text{d}}$) $\left[\dfrac{x+1}{x-1}-1\right]:\left[1+\dfrac{1}{x-1}\right]=\dfrac{1}{2}$

Ö23$'$. En fader, som är 33 år, är 66 gånger så gammal som sin son. När blir han endast 6 gånger så gammal?

Ett **rationellt tal** kan skrivas på formen $\frac{p}{q}$, där p och q är heltal och $q \neq 0$. Ett **rationellt uttryck** ($i\,x$) kan skrivas på formen $\frac{p(x)}{q(x)}$, där $p(x)$ och $q(x)$ är polynom och $q(x) \not\equiv 0$, d.v.s. $q(x)$ ej är identiskt noll.

Om gradtalet för $p(x)$ är större än eller lika med gradtalet för $q(x)$, kan $p(x)$ divideras med $q(x)$, så att

$\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, d.v.s. $p(x) = k(x) \quad q(x) + r(x)$. $k(x)$ kallas kvot(polynom) och $r(x)$ restpolynom.

Exempel: Dividera $\frac{2x^3 - 3x^2 + 8x + 1}{x^2 - 2x + 3}$ så långt som möjligt.

Lösning:

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x + 1 (= k(x)) \\
(q(x) =)\underline{x^2 - 2x + 3}| & \overline{2x^3 - 3x^2 + 8x + 1} (= p(x)) \\
 & \underline{-(2x^3 - 4x^2 + 6x)} \\
 & x^2 + 2x + 1 \\
 & \underline{-(x^2 - 2x + 3)} \\
 & 4x - 2 (= r(x))
\end{array}
$$

vilket ger

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 8x + 1}{x^2 - 2x + 3} = 2x + 1 + \frac{4x - 2}{x^2 - 2x + 3}$$

Ö24. Utför följande divisioner: a) $\frac{x^4}{x^2 - 1}$ b) $\frac{x^4 + x}{x^4 - 1}$ c) $\frac{2x^3 + 8x^2 - 7x + 4}{x^2 + 5x - 3}$

d) $\frac{x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6}{x^2 + 4x + 3}$ e) $\frac{2x^3 - 3x^2 + 8x + 1}{2x + 1}$ f) $\frac{3x^4 - x^3 - x^2 - x}{3x^2 - x - 2}$

1.3 Lineära ekvationssystem. (Ekvationer av första graden med två eller flera obekanta)

Vid lösning av ekvationer med flera obekanta söker man genom elimination skaffa sig en ekvation, som endast innehåller en obekant.

Exempel: Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + 3y = 1 \end{cases}$

Metod 1: (Substitutionsmetoden): Den första ekvationen ger $x = (5 - 2y)/3$, som insättes (substitueras) i den andra ekvationen. Då fås $7(5 - 2y)/3 + 3y = 1$, d.v.s. $35 - 14y + 9y = 3$ eller $32 = 5y$, varför $y = 32/5 = \underline{6{,}4}$ och $x = (5 - 2y)/3 = -13/5 = \underline{-2{,}6}$.

Metod 2: (Additionsmetoden): Multiplicera (för att eliminera x) de givna ekvationerna med 7 resp. (-3) och addera:

$$\left\{\begin{array}{r} 21x + 14y = 35 \\ \underline{-21x - \ 9y = -3} \end{array}\right.$$
$$5y = 32$$

Härav fås $y = 32/5 = \underline{6{,}4}$, som insatt i en av de givna ekvationerna (vilken som helst) ger $x = -13/5 = \underline{-2{,}6}$.

Svar: $x = -2{,}6$ och $y = 6{,}4$

OBS: Man bör alltid *kontrollera svaret* genom insättning i de givna ekvationerna!

Anmärkning 1. I exemplet ovan gäller att:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y = 5 \\ 7x + 3y = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 3x + 2y = 5 \\ 5y = 32 \end{array}\right.$$

där det högra ekvationssystemet är *triangulärt*, d.v.s. koefficienterna för x och y bildar en triangel.

Anmärkning 2. Den lineära ekvation $ax + by = c$ betyder geometriskt en **rät linje**. Ett system av två sådana lineära ekvationer har alltså

a) *en*, b) *ingen* eller c) *oändligt* många lösningar beroende på om de räta linjerna är a) *skärande* b) *parallella* (och olika) eller c) *sammanfallande*.

Ö25. Lös ekvationssystemen $\underline{\text{a}})\ \left\{\begin{array}{l} 2x + 3y = 10 \\ 2x - y = 6 \end{array}\right.$ $\quad \underline{\text{b}})\ \left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 10 \\ x + y = 5 \end{array}\right.$

$\underline{\text{c}})\ \left\{\begin{array}{l} 2x + 3y = 2 \\ 7x + 5y = -4 \end{array}\right.$ $\quad \underline{\text{d}})\ \left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 3 \\ 9x - 6y = 8 \end{array}\right.$ $\quad \underline{\text{e}})\ \left\{\begin{array}{l} 5x + y = 3 \\ 10x + 2y = 6 \end{array}\right.$

$\underline{\text{f}})\ \left\{\begin{array}{l} 15x + 14y = 59 \\ 12x - 35y = 1 \end{array}\right.$ $\quad \underline{\text{g}})\ \left\{\begin{array}{l} 1/x + 1/y = 5/6 \\ 1/x - 1/y = 1/6 \end{array}\right.$ $\quad \underline{\text{h}})\ \left\{\begin{array}{l} 6x + 5y + z = 45 \\ 5x + 2y - z = 23 \\ 13x - 7y + z = 6 \end{array}\right.$

$\underline{\text{i}})\ \left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 20{,}1 \\ x + y - z = 9{,}9 \\ 3x + 2y + 8z = 30{,}4 \end{array}\right.$ $\quad \underline{\text{j}})\ \left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{array}\right.$ $\quad \underline{\text{k}})\ \left\{\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 3 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 5x + 4y + z = 0 \end{array}\right.$

l) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+y+z=3 \\ x+3y+2z=1 \end{cases}$ m) $\begin{cases} 2x-6y+4z=3 \\ 3x+6y+5z=7 \\ 4x-2y+6z=5 \end{cases}$ l) $\begin{cases} x-y-2z+w=5 \\ x+2y+3z+2w=3 \\ 2x+2y+z+w=7 \\ 3x-2y-z+w=8 \end{cases}$

Ö26. En person som tillfrågades om sin ålder svarade: "För 9 år sedan var jag 26 gånger så gammal som min son, men om 2 år blir jag blott 4 gånger så gammal." Hur gammal var han?

1.4 Absolutbelopp

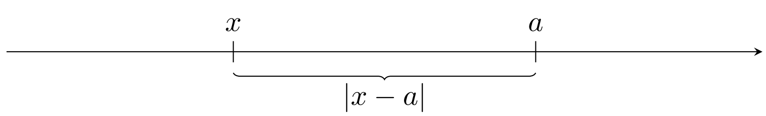
Definition: $|x| = \begin{cases} x & \text{om} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{om} \quad x < 0 \end{cases}$

OBS: $|x| \geq 0$ för alla x.

Av definitionen följer att

$$|x-a| = \begin{cases} x-a & \text{för} \quad (x-a) \geq 0, \quad \text{d.v.s. för} \quad x \geq a \\ -(x-a) = a-x & \text{för} \quad (x-a) < 0, \quad \text{d.v.s. för} \quad x < a \end{cases}$$

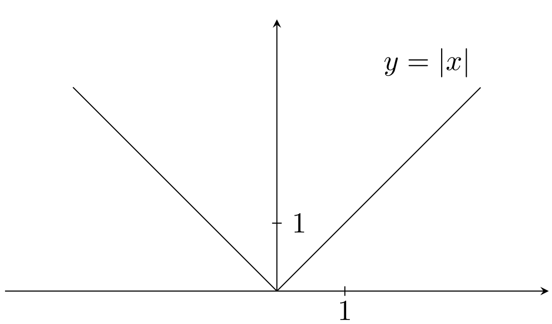
Geometriskt kan $|x-a|$ uppfattas som avståndet mellan punkterna x och a på tallinjen:

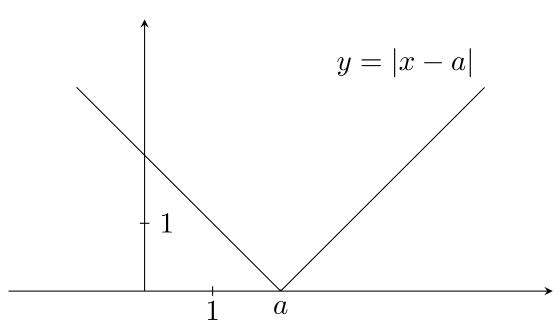


$\boxed{\textbf{OBS}: |x-a| = |a-x|}$ och $\boxed{|x-a| = b \Rightarrow x-a = \pm b}$

Olikheten $|x-a| \leq b$ kan skrivas utan beloppstecken: $-b \leq x-a \leq b$, d.v.s. $a-b \leq x \leq a+b$, (om $b \geq 0$).

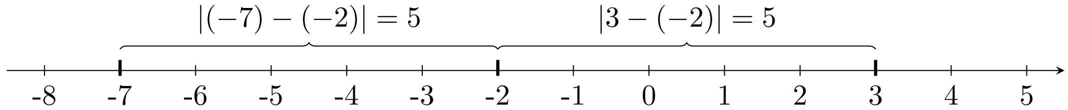
Graferna till $y = |x|$ resp. $y = |x-a|$ är:





Exempel: a) Enligt definitionen är $|-3| = -(-3) = +3$, ty $x = -3 < 0$.

b) Ekvationen $|x+2| = 5$ kan skrivas $|x-(-2)| = 5$. Med avståndsbetraktelse fås att rötterna till ekvationen är $\underline{x_1 = 3 \text{ och } x_2 = -7}$.



c) Olikheten $|x+1| < 3$ kan skrivas $-3 < x+1 < 3$, d.v.s. $-4 < x < 2$.

Exempel: Lös ekvationen $|x-3| + |2x+1| = 5$.

Lösning: Vi har $|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{för} \quad x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{för} \quad x < 3 \end{cases}$

och $|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{för} \quad 2x+1 \geq 0, \quad \text{d.v.s. } x \geq -1/2 \\ -(2x+1) & \text{för} \quad x < -1/2 \end{cases}$

Vi måste alltså studera 3 olika fall:

Fall 1: För $x \geq 3$ fås ekvationen $(x-3)+(2x+1) = 5$, d.v.s. $3x = 7$, som ger $x = 7/3$. Men $7/3 < 3$, d.v.s. $7/3$ ligger ej i det rätta intervallet, varför $x = 7/3$ ej är en rot till den givna ekvationen.

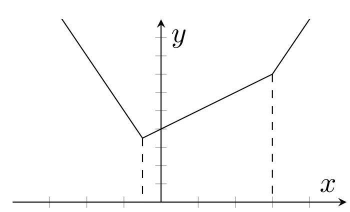
Fall 2: För $-1/2 \leq x < 3$ fås ekvationen $-(x-3)+(2x+1) = 5$, som ger $x = 1$. $x_1 = 1$ ligger i intervallet $-1/2 \leq x < 3$ och är alltså en rot. (Pröva genom insättning i den givna ekvationen!)

Fall 3: För $x < -1/2$ fås $-(x-3)-(2x+1) = 5$, som ger $x = -1$. $x_2 = -1$ ligger i rätt intervall och är en rot.

Svar: Ekvationen $|x-3| + |2x+1| = 5$ har rötterna $x_1 = 1$ och $x_2 = -1$.

Tillägg (till exemplet ovan): Om vi vill rita grafen till $y = |x-3| + |2x+1|$, så skriver vi

$$y = \begin{cases} (x-3)+(2x+1) = 3x-2 & \text{för} \quad x \geq 3 \\ -(x-3)+(2x+1) = x+4 & \text{för} \quad -1/2 \leq x < 3 \\ -(x-3)-(2x+1) = -3x+2 & \text{för} \quad x < -1/2 \end{cases}$$



Man ser av grafen för $y = |x-3| + |2x+1|$, att t.ex. ekvationen $|x-3| + |2x+1| = 2$ *saknar lösning.*

Ö27. Bestäm a) $|7|$ b) $|-7|$ c) $|0|$

Ö28. Lös ekvationerna a) $|x+1| = 1$ b) $|3-x| = 7{,}5$ c) $|x+4| = 0$

d) $|3-2x| = 5$ e) $|x-2| = -2$

Ö29. Angiv (utan beloppstecken) de x, som satisfierar a) $|x-1| \leq 2$

b) $|x+3| < 5$ c) $2 < |x-2| \leq 3$ d) $|x+2| \leq 0$

Ö30. Lös ekvationerna a) $|x-2| + |x+1| = 4$ b) $|x-2| + |x+1| = 3$

c) $|x-5| + 3|x+5| = 20$ d) $|x-5| + 3|x+5| = 10$

1.5 Kvadratroten ur ett positivt reellt tal

Vi observera först att

$x^2 = x \cdot x \geq 0$ för alla reella tal x

ty, om t.ex. $x = -t < 0$, så är $x^2 = (-t)^2 = (-1)^2 \cdot t^2 = +t^2 > 0$, ty $t = -x > 0$. Alltså har ekvationen $x^2 = b$ reella lösningar endast om $b \geq 0$.

Definition: Med $\sqrt{b}$, där $b \geq 0$, menas det icke-negativa, reella tal, vars kvadrat är b, d.v.s. $(\sqrt{b})^2 = b$, om $b \geq 0$.

OBS: $\sqrt{b} > 0$ för $b > 0$.

Exempelvis är $\sqrt{9} = +3$.

Ekvationen $x^2 = b$ har för $b > 0$ två olika reella rötter:
$x_1 = \sqrt{b}$ och $x_2 = -\sqrt{b}$

ty $x_1^2 = (\sqrt{b})^2 = b$ (enligt definition), men även $x_2^2 = (-\sqrt{b})^2 = (-1)^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = +(\sqrt{b})^2 = b$. Man skriver

$x^2 = b \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{b}$, för $b \geq 0$

(Anmärkning: För $b = 0$ är $x_1 = x_2 = 0$ en dubbelrot).

Exempelvis har ekvationen $x^2 = 9$ rötterna $x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, d.v.s. $x_1 = 3$ och $x_2 = -3$. Av definitionen på $\sqrt{b}$ följer vissa **räkneregler**:

1. $\sqrt{a^2} = |a|$ för alla reella a, d.v.s. $\sqrt{a^2} = a$ om $a \geq 0$ och $\sqrt{a^2} = -a$ om $a < 0$,
2. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ och $\sqrt{a}/\sqrt{b} = \sqrt{a/b}$, för a och $b > 0$.

En viktig tillämpning av reglerna 1 och 2 är

3. $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ för $b \geq 0$, alla a

Ett bråk med rotuttryck i nämnaren kan omformas med reglerna 4 eller 5:

4. $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$, ty $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$,

5. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ och $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$.

Reglerna 5 kallas **förlängning med konjugatuttryck**; $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ kallas konjugatuttrycket till $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$. T.ex. visas $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} =$ (konjugatregeln) $= \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ för $a \neq b$, a och $b > 0$.

OBS: I allmänhet är $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$, (alltför vanligt teknologfel att tro motsatsen), ty t.ex. $a = b = 1$ ger $\sqrt{a+b} = \sqrt{2}$ medan $\sqrt{a}+\sqrt{b} = 2$. På samma sätt är i allmänhet $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Exempel: a) Ekvationen $4x^2-3=0$, d.v.s. $x^2 = 3/4$ har rötterna $x_{1,2} = \pm\sqrt{3/4} = \pm\sqrt{3}/2$

b) (skriv med heltalsnämnare): $\dfrac{1}{5+\sqrt{6}} =$ [multiplicera med konjugatuttrycket] $=$

$$= \frac{5-\sqrt{6}}{(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})} = \frac{5-\sqrt{6}}{5^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{5-\sqrt{6}}{25-6} = \frac{5-\sqrt{6}}{19}$$

Exempel: a) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ b) För $a>0, b>0$ är $a\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a^2\cdot b}$

c) För $a<0, b>0$ är $a\cdot\sqrt{b} = -(-a)\sqrt{b} = -\sqrt{(-a)^2\cdot b} = -\sqrt{a^2\cdot b}$

d) För $a>0, b>0$ är $a\cdot\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{a^2\cdot\frac{b}{a}} = \sqrt{ab}$

e) För $a<0, b<0$ är $a\cdot\sqrt{\frac{b}{a}} = -(-a)\sqrt{\frac{b}{a}} = -\sqrt{(-a)^2\cdot\frac{b}{a}} = -\sqrt{a^2\cdot\frac{b}{a}} = -\sqrt{ab}$

f) (förenkla): $\dfrac{3-x}{\sqrt{x-3}} = -\dfrac{x-3}{\sqrt{x-3}} = -\sqrt{\dfrac{(x-3)^2}{x-3}} = -\sqrt{x-3}$ för $x>3$.

OBS: $\sqrt{x-3}$ är definierat för $x-3 \geq 0$, d.v.s. $x \geq 3$, men $1/\sqrt{x-3}$ endast för $x>3$].

g) $$\frac{x}{\sqrt{x^2+x^3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2(1+x)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+x}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+x}} = \begin{cases} 1/\sqrt{1+x} & \text{för } x>0 \\ -1/\sqrt{1+x} & \text{för } -1<x<0. \end{cases}$$

OBS: Var uppmärksam på tecknet vid inmultiplicering i och utbrytning ur rotuttryck!!!

Ö31. Förenka a) $\sqrt{0{,}49}$ b) $\sqrt{90000}$ c) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{75}$ d) $\sqrt{10}/\sqrt{125}$ e) $\sqrt{12}-\sqrt{3}$

f) $\sqrt{2}-\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{16}-\sqrt{32}+\sqrt{64}$.

Ö32. Lös ekvationen a) $x^2-25=0$ b) $5-x^2=0$ c) $9x^2-4=0$ d) $16-6x^2=0$
e) $x^2=0$

Ö33. Skriv med heltalsnämnare a) $2/\sqrt{6}$ b) $3/\sqrt{21}$ c) $1/(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ d) $2/(\sqrt{11}-3)$

e) $1/(2-\sqrt{5})$ f) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})/(\sqrt{6}+\sqrt{3})$

Ö34. Förenkla (och angiv definitionsmängd): a) $\sqrt{x^2+4x+4}$ b) $x/\sqrt{x^2}$ c) $(\sqrt{x})^2/x$

d) $(x^2-9x)/\sqrt{9-x}$ e) $x/\sqrt{x^3-2x^2}$ f) $\sqrt{x^3+2x^2}/x$

1.6 Imaginära tal. Komplexa tal

Ekvationen $x^2=b$ saknar *reella* rötter, om $b<0$. Däremot har den imaginära (= icke-reella) rötter. Sätt $b=-c$.

> Ekvationen $x^2=-c$ har för $c>0$ två olika (rent) *imaginära rötter* $x_1=i\sqrt{c}$ och $x_2=-i\sqrt{c}$, där $i^2=-1$, d.v.s
>
> $$x^2=-c \Rightarrow x_{1,2}=\pm i\sqrt{c}, \quad \text{för } c>0.$$

Man kan också (något oegentligt) skriva:

$$x^2=-c \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-c}=\pm i\sqrt{c}, \quad \text{för } c>0.$$

Exempel: $x^2+12=0$, d.v.s $x^2=-12$ ger $x_{1,2}=\pm\sqrt{-12}=\pm i\sqrt{12}=\pm i\cdot 2\sqrt{3}$

Ö35. Lös ekvationerna a) $x^2=-4$ b) $3+25x^2=0$ c) $9+12x^2=0$ d) $9-12x^2=0$

e) $(x-2)^2=-9$ f) $(x+1)^2+4=0$ g) $x^4=16$ (sätt $x^2=z$)

> Ett **komplext tal** kan skrivas på formen $u+i\cdot v$, där u och v är *reella* tal och i är den *imaginära enheten*, som satisfierar ekvationen: $i^2=-1$.

$u+i\cdot$v är *reellt* om $v=0$, *imaginärt* om $v\neq 0$ och *rent imaginärt* om $u=0, v\neq 0$. Räknereglerna för reella tal gäller också för komplexa tal, (med tilläggsregeln: $i^2=-1$).

Exempel: $\dfrac{1}{3+4i}=\dfrac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)}=[\text{konjugatregeln}]=\dfrac{3-4i}{3^2-(4i)^2}=$
$=\dfrac{3-4i}{9-16i^2}=\dfrac{3-4i}{9+16}=\dfrac{3-4i}{25}=\dfrac{3}{25}-i\cdot\dfrac{4}{25}$

Ö36. Skriv på formen $u+iv$ a) $(3+i)-(1-4i)$ b) $(3+i)(1-4i)$

c) $(3-4i)^2$ d) $1/(1+i)$ e) $1/(1-4i)$ f) $(3+i)/(1-4i)$

g) $1/(3+i)+1/(1-4i)$

1.7 Andragradsekvationer. Faktoruppdelning av andragradspolynom

En andragradsekvation $ax^2+bx+c=0$ kan, då $a \neq 0$, skrivas på *normalform*: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$. En andragradsekvation på normalform, $x^2+px+q=0$, kan lösas genom **kvadratkomplettering**:

$$x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0, \quad \text{d.v.s.} \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q,$$

varför $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$.

Andragradsekvationen $x^2+px+q=0$ har rötterna

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Dessa rötter x_1 och x_2 är

1) reella och olika, om $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$,

2) reella och lika, om $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0$,

3) imaginära och olika, om $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$.

OBS: Ekvationen $x^2+px=0$, för $q=0$, har en rot $x_1=0$ (och $x_2=-p$).

Exempel: a) Ekvationen $x^2+6x+5=0$ har rötterna $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{(-3)^2-5}=-3\pm\sqrt{9-5}=-3\pm\sqrt{4}=-3\pm 2$ d.v.s. $x_1=-3+2=-1$ och $x_2=-3-2=-5$

b) Ekvationen $6+3x-4x^2=0$ kan skrivas $x^2-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}=0$, som har rötterna $x_{1,2}=\frac{3}{8}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{3}{2}}=\frac{3}{8}\pm\sqrt{\frac{9}{64}+\frac{3}{2}}=\frac{3}{8}\pm\sqrt{\frac{9+96}{64}}=\frac{3}{8}\pm\frac{1}{8}\cdot\sqrt{105}$, d.v.s $x_1=(3+\sqrt{105})/8$ och $x_2=(3-\sqrt{105})/8$.

c) Ekvationen $x^2+6=4x$ kan skrivas $x^2-4x+6=0$ med lösning $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-6}=2\pm\sqrt{-2}=2\pm i\cdot\sqrt{2}$ d.vs. $x_1=2+i\cdot\sqrt{2}$ och $x_2=2-i\cdot\sqrt{2}$

Ö37. Lös ekvationerna a) $x^2+3x-4=0$ b) $3+2x-x^2=0$ c) $2x^2=3+x$

d) $3x + 7x^2 = 0$ e) $4x^2 + 9 = 12x$ f) $5x^2 + 3x = 1$

Ö38. Lös ekvationerna a) $x^2 + 2x + 2 = 0$ b) $5x^2 + 3x + 1 = 0$ c) $3x^2 + 1 = 3x$

Ö39. Lös ekvationerna a) $x + 3 = 4 \cdot x^{-1}$, (multiplicera med x)

b) $x + 9x^{-1} = 12$ c) $3 + x^{-2} = x^{-1}$

Ö40. Lös i följande ekvationer ut y uttryckt i x:

a) $3y^2 + 5xy = 2x^2$ b) $y^2 + 3xy - 10x^2 + y + 5x = 0$

c) $2y^2 - 2x^2 - 3xy + 3x + y - 1 = 0$ d) $x^2 + 5y^2 + 2xy = 8y - 3$

Om *ekvationen* $x^2 + px + q = 0$ har rötterna x_1 och x_2, så kan *polynomet* $x^2 + px + q$ **faktoruppdelas**:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Anmärkning: Om $(p/2)^2 - q < 0$, så är x_1 och x_2 icke-reella, och i så fall kan $x^2 + px + q$ ej faktoruppdelas med *reella* tal. (Däremot kan $x^2 + px + q$ alltid faktoruppdelas med *komplexa* tal).

Av likheten $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x \cdot x - x_1 \cdot x - x \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 =$ $= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$ fås följande **samband mellan rötter och koefficienter till en andragradsekvation**:

$x_1 + x_2 = -p$ och $x_1 \cdot x_2 = +q$, om x_1 och x_2 är rötterna till $x^2 + px + q = 0$.

Exempel: Faktoruppdela $1 - 2x - 3x^2$.

Lösning: $1 - 2x - 3x^2$ = [bryt ut koefficienten för x^2] $= (-3) \cdot \left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right)$. Lös först ekvationen $x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$. Man får $x_1 = 1/3$ och $x_2 = -1$ (visa detta!). Då är $1 - 2x - 3x^2 = (-3) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot (x + 1)$ en faktoruppdelning. Den kan även skrivas $(1 - 3x)(x + 1)$.

Ö41. Faktoruppdela (med reella tal) a) $x^2 + x - 6$ b) $8 - 6x - 2x^2$

c) $x^2 - x - 1$ d) $x^2 + x + 1$

Ö42. Angiv en andragradsekvation med rötterna a) 2 och -5

b) $-\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{3}$ c) $1 + \sqrt{5}$ och $1 - \sqrt{5}$ d) $2 + i$ och $2 - i$

Ö43. Härled sambanden mellan rötter och koefficienter utgående från formeln $x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$.

En fjärdegradsekvation, *som saknar $x-$ och x^3-termer*, $ax^4 + bx^2 + c = 0$, kan med substitutionen $x^2 = z$ överföras till en andragradsekvation (för z), $az^2 + bz + c = 0$.

Om denna andragradsekvation har rötterna z_1 och z_2, så har den ursprungliga fjärdegradsekvationen rötterna $x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}$ och $x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$, ty $x^2 = z$.

Exempel: $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$. Sätt $x^2 = z$. Då fås $z^2 - 20z + 64 = 0$ med rötter $z_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6$, d.v.s. $z_1 = 16$ och $z_2 = 4$.

$x^2 = z_1 = 16$ ger $x_{1,2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ och $x^2 = z_2 = 4$ ger $x_{3,4} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, d.vs. rötterna till $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ är $4, -4, 2$ och -2.

OBS: En fjärdegradsekvation har alltid fyra rötter, (som kan vara olika eller lika).

Ö44. Lös ekvationen a) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ b) $1225 - 74x^2 + x^4 = 0$

c) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ d) $24x^2 = 72 + 2x^4$ e) $6x^4 = 7x^2 + 3$

Anmärkning: Flera olika typer av ekvationer (t.ex. rot-, exponential- och trigonometriska) kan i vissa fall med lämpliga *substitutioner* överföras till andragradsekvationer.

Ö45. Lös ekvationerna a) $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$, (sätt $2^x = z$)

b) $3^x = 4 - 3^{1-x}$, (sätt $3^x = z$)   c) $x + 6\sqrt{x} = 1$, (sätt $\sqrt{x} = z$).

1.8 Faktorsatsen. Ekvationer av gradtal större än två.

Faktorsatsen: Om $p(x)$ är ett polynom i x och $p(x_1) = 0$, d.v.s. om x_1 är en rot till polynomekvationen $p(x) = 0$, så är $(x - x_1)$ en faktor i $p(x)$, d.v.s.

$$p(x) = (x - x_1) \cdot q(x),$$

där $q(x)$ är ett polynom med en enhet lägre gradtal än $p(x)$.

Exempel: Lös ekvationen $x^3 - 9x + 10 = 0$.

Lösning: Efter prövning (av t.ex. $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) finner man att $x_1 = 2$ är en rot, ty $2^3 - 9 \cdot 2 + 10 = 8 - 18 + 10 = 0$. Enligt faktorsatsen är då $x^3 - 9x + 10$ delbart med $x - x_1 = x - 2$.

Metod 1: S.k. lång division med $(x - 2)$ (Se paragraf 1.2) ger $x^3 - 9x + 10 =$
$= (x - 2) \cdot (x^2 + 2x - 5)$. (Genomför räkningarna!).

Metod 2: Ansätt $x^3 - 9x + 10 = (x - 2)(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$. Man ser direkt (genom multiplicering av parenteserna i högra ledet), att $a = 1$ och $c = -5$. Då är $x^3 - 9x + 10 = (x - 2) \cdot (x^2 + b \cdot x - 5) =$

$x^3 + b \cdot x^2 - 5x - 2x^2 - 2bx + 10 = x^3 + (b-2)x^2 - (5+2b)x + 10$, varav fås $b = 2$, (vid jämförelse av första och sista ledet).

Vi har alltså $x^3 - 9x + 10 = (x-2)(x^2 + 2x - 5) = 0$, där $x_1 = 2$.
Ekvationen $x^2 + 2x - 5 = 0$ ger $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1+5} = -1 \pm \sqrt{6}$.

Svar: Rötterna är $x_1 = 2, x_2 = -1 + \sqrt{6}$ och $x_3 = -1 - \sqrt{6}$.

Anmärkning: En tredjegradsekvation har tre rötter, (lika eller olika).

Exempel: Faktoruppdela (med reella tal) $x^3 - 3x^2 + 6x - 4$.

Lösning: Ekvationen $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = 0$ har en rot $x_1 = 1$. Man finner [genom division med $(x-1)$] att $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = (x-1)(x^2 - 2x + 4)$. Ekvationen $x^2 - 2x + 4 = 0$ har imaginära rötter (visa detta!), varför polynomet $x^2 - 2x + 4$ ej kan ytterligare faktoruppdelas med *reella* tal.

Svar: $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = (x-1)(x^2 - 2x + 4)$

Exempel: Lös ekvationen $(x^2 - 2x - 7)^2 = 0$.

Lösning: Först löses ekvationen $x^2 - 2x - 7 = 0$, som har rötterna $x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$. Den givna ekvation, som är av fjärde graden, skall ha fyra rötter. Ekvationen kan skrivas:

$$(x^2 - 2x - 7)(x^2 - 2x - 7) = 0,$$

varav inses att $x_3 = x_1 = 1 + 2\sqrt{2}$ och att $x_4 = x_2 = 1 - 2\sqrt{2}$.

Svar: Rötterna är $1 + 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}$, $1 - 2\sqrt{2}$ och $1 - 2\sqrt{2}$ (*dubbelrötter*).

Ö46. Lös ekvationerna a) $x^3 + 3x^2 + x = 0$ b) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $2x^3 + 14x^2 + 22x + 4 = 0$ d) $6 + 3x^2 - 5x - x^3 = 0$ e) $x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$

f) $3 \cdot x^{-2} + 18 \cdot x^{-3} = 1 + 4 \cdot x^{-1}$

Ö47. Lös ekvationerna a) $(x-1)^3 = 0$ b) $x^3 - 1 = 0$ c) $(x^2 + 1)^3 = 0$

d) $(x^3 + 1)^2 = 0$

Ö48. Faktoruppdela (med reella tal): a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ b) $x^3 + 7x^2 + 11x + 2$

c) $2x^3 + 4x^2 + x + 2$ d) $6 + 3x^2 - 5x - x^3$ e) $12x + 4x^3 - 2x^4 - 8x^2 - 6$

1.9 Rotekvationer

En rotekvation är en ekvation, där den obekanta storheten förekommer under rotmärke. En sådan ekvation kan (ibland) lösas med bortskaffande av rotmärket genom en eller flera *kvadreringar*, (eventuellt efter överflyttning av vissa termer).

OBS: Den kvadrerade ekvationen kan ha flera rötter än den ursprungliga rotekvationen. Prövning av rötterna är därför nödvändig!

Man har nämligen att $q(x) = \sqrt{p(x)} \Rightarrow (q(x))^2 = p(x)$, men att $(q(x))^2 = p(x) \Rightarrow q(x) = \pm\sqrt{p(x)}$.

Exempel: Lös ekvationen $1 + \sqrt{x^2 + 5} = 2x$.

Lösning: Ekvationen kan skrivas $\sqrt{x^2 + 5} = 2x - 1$. Kvadrering ger $x^2 + 5 = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$, d.v.s. $3x^2 - 4x - 4 = 0$, som löses. Man får $x_1 = 2$ och $x_2 = -2/3$. Nu måste prövning ske genom insättning i den givna ekvationen, (eller (*bättre*) genom prövning i ekvationen $\sqrt{x^2 + 5} = 2x - 1$, varvid *endast tecknet behöver prövas*, eftersom $q^2 = p \Leftrightarrow q = \pm\sqrt{p}$]:
$x_1 = 2$ ger *vänster led*: $VL = 1 + \sqrt{x^2 + 5} = 1 + \sqrt{4 + 5} = 1 + \sqrt{9} = 1 + 3 = 4$ och *höger led*: $HL = 2x = 2 \cdot 2 = 4$, varför $x_1 = 2$ är en rot till den givna ekvationen.

$x_2 = -2/3$ ger $VL = 1 + \sqrt{\frac{4}{9} + 5} = 1 + \sqrt{\frac{40}{9}} = 1 + \frac{7}{3} = 10/3$, men $HL = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) =$
$= -4/3$, varför $x_2 = -2/3$ ej är en rot till den givna ekvationen. ($x_2 = -2/3$ är en s.k. falsk rot, erhållen på grund av kvadreringen).

Svar: Ekvationen har roten $x_1 = 2$.

Anmärkning: $x_2 = -2/3$ är rot till ekvationen: $1 - \sqrt{x^2 + 5} = 2x$.

Ö49. Lös ekvationerna a) $3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x$ b) $x + 2\sqrt{x} = 8$

c) $\sqrt{x + 132} = x$ d) $\sqrt{x + 1} \cdot \sqrt{x + 6} - x = 3$ e) $2x + \sqrt{x^2 + x} = 1$

f) $\sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 5}$

1.10 Ekvationssystem av högre grad

Vissa system av ekvationer med två (eller flera) obekanta kan lösas med substitutionsmetoden:

Exempel: Lös ekvationssystemet $\begin{cases} (x+y)(x-1) = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = 4 & (2) \end{cases}$

Lösning: Ekvation (1) ger $x + y = 0$ eller $x - 1 = 0$.

Fall 1: $x + y = 0$, d.v.s. $y = -x$ ger insatt i ekvation (2), $x^2 + x^2 = 4$, varav fås $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Men $y = -x$. Vi får alltså lösningarna

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ y_1 = -\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x_2 = -\sqrt{2} \\ y_2 = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Fall 2: $\underline{x-1=0}$,d.vs. $x=1$ ger insatt i ekvation (2), $1+y^2=4$, varav fås $y_{3,4}=\pm\sqrt{3}$. Vi får alltså lösningrna $x_3=1$, $y_3=\sqrt{3}$ och $x_4=1$, $y_4=-\sqrt{3}$.

Svar: (x,y) är lika med $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(1,\sqrt{3})$ eller $(1,-\sqrt{3})$.

Anmärkning: Geometriskt betyder ekvation (1) (i exemplet ovan) två räta linjer och ekvation (2) en cirkel. Lösningarna är alltså koordinaterna för skärningspunkterna. (Rita figur!).

Ö50. Lös ekvationssystemen

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2-y^2=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+3y^2=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (y+2)(x+y+1)=0 \\ x^2+y^2+4y=9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2-xy=x \\ x^2+3y^2=6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2y^2+xy+4x^2=10 \\ y^2-2xy+12x^2=5 \end{cases}$

1.11 Olikheter

För olikheten $a>b$ gäller bl.a. följande **räkneregler**:

$a>b \Leftrightarrow a-b>0$	$a>b \Leftrightarrow a\cdot c>b\cdot c$, om $\underline{c>0}$
$a>b \Leftrightarrow -a<-b$	$a>b \Leftrightarrow a\cdot c<b\cdot c$, om $\underline{c<0}$
$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$	$a>b \Leftrightarrow a/c>b/c$, om $\underline{c>0}$
$a>b \Leftrightarrow a-c>b-c$	$a>b \Leftrightarrow a/c<b/c$, om $\underline{c<0}$

För olikheterna $a<b, a\geq b$ och $a\leq b$ gäller liknande regler.

OBS: $a>b \Leftrightarrow b<a$ och $a\geq b \Leftrightarrow b\leq a$.

Vid behandling av olikheter (nedan): flytta alltid över termer, så att *ena ledet blir* 0.

Exempel: För vilka x är $2x^3<7x^2+5x-4$?

Lösning: Olikheten kan skrivas $p(x)=2x^3-7x^2-5x+4<0$. Ekvationen $2x^3-7x^2-5x+4=0$ har rötterna $x_1=-1$, $x_2=1/2$ och $x_3=4$ (visa detta!). Enligt faktorsatsen är då $p(x)=2x^3-7x^2-5x+4=2(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-4)$.

För att bestämma de x, för vilka $p(x)<0$, kan vi sätta upp följande tecken-tabell:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$(x+1)$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$
$(x-\dfrac{1}{2})$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$
$(x-4)$	$---$	$-$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$
$p(x)$	$---$	0	$+++$	0	$---$	0	$+++$

Vi finner att $p(x) < 0$, om $x < -1$ eller $\dfrac{1}{2} < x < 4$.

Svar: Den givna olikheten gäller, om $x < -1$ eller $1/2 < x < 4$.

Exempel: För vilka x är $\dfrac{1}{x} \geq 2x - 1$?

Lösning: Olikheten kan skrivas:

$$R(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{1 - 2x^2 + x}{x} \geq 0.$$

$R(x)$ är en rationell funktion, där täljare (och nämnare) kan faktoruppdelas. Täljaren $T(x) = 1 - 2x^2 + x = 0$ har rötterna $-1/2$ och 1, varför $T(x) = (-2)(x + \dfrac{1}{2})(x-1) = -(2x+1)(x-1) = (2x+1)(1-x)$ och $R(x) = (2x+1)(1-x)/x$.

Vi får följande teckentabell:

	$x < -1/2$	$x = -1/2$	$-1/2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$2x+1$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$
$1-x$	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$	0	$---$
x	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$
$R(x)$	$+++$	0	$---$	ej def.	$+++$	0	$---$

Vi ser att $R(x) \geq 0$, om $x \leq -1/2$ eller $0 < x \leq 1$. (för $x = 0$ är $R(x)$ ej definierad).

Anmärkning: Man kan också skriva $R(x) = (-2)(x + \dfrac{1}{2})(x-1)/x$ och bilda en teckentabell med faktorerna $(-2), (x + \dfrac{1}{2}), (x-1)$ och x. (Gör detta!).

Svar: Den givna olikheten gäller, om $x \leq -1/2$ eller $0 < x \leq 1$.

OBS: Den givna olikheten (i exemplet ovan) får ej multipliceras med x, d.v.s. den får ej skrivas $1 \geq x(2x-1)$, ty x kan vara *negativt*.

Ö51. För vilka x gäller följande olikheter?

a) $1 \geq 2x^2 - x$ b) $x^2 + x < 1$ c) $x^2 + 1 \leq x$ d) $x^2 > 2x - 1$

e) $x^3 + 2x > 3x^2$ f) $6x^3 < 17x^2 + 4x - 3$ g) $x + 3 \geq \dfrac{2x}{x-2}$ h) $(x-1)^2 \leq \dfrac{3}{x+1}$

i) $\dfrac{1}{x} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{2}{x}$ (studera först de båda olikheterna var för sig).

1.12 n:te roten ur ett reellt tal. Potenser med rationell exponent.

Definition: Med $\sqrt[n]{b}$ menas den reella (och *positiva*, om $n = 2m = jämnt$) roten till $x^n = b$, d.v.s. $(\sqrt[n]{b})^n = b$.

Ekvationen $x^n = b$, där b reellt tal, har då följande reella *rötter*:

1) $x = \sqrt[n]{b}$, om $n = 2m+1$ =udda (positivt) heltal,

2) $x = \pm\sqrt[n]{b}$, där $\sqrt[n]{b} \geq 0$, om $b \geq 0$ och $n = 2m$=jämnt (positivt) heltal.

[Dessutom har $x^n = b$ alltid *komplexa* rötter, om $n > 2$, $b \neq 0$]. (Om n är jämnt och $b < 0$, så saknar $x^n = b$ reella rötter och $\sqrt[n]{b}$ är ej definierat.)

För udda $n = 1,3,5,\ldots$ gäller att: $\sqrt[n]{-b} = -\sqrt[n]{b}$.

Definition: $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$, och (för $b > 0$) $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$.

Exempelvis gäller för den vanliga *kvadratroten*, att

$\sqrt{b} = \sqrt[2]{b} = b^{1/2} \quad \text{för} \quad b \geq 0$

Man kan visa, att *potensuttrycket* $b^{\frac{m}{n}}$ med rationell exponent $x = \dfrac{m}{n}$ för $b > 0$ satisfierar (de allmänna) potens- (eller *exponential*)lagarna:

$$b^x \cdot b^y = b^{x+y},\ b^x/b^y = b^{x-y},\ 1/b^y = b^{-y},\ (b^x)^y = b^{x\dot{y}},$$
$$(ab)^x = a^x \cdot b^x \quad \text{och} \quad (a/b)^x = a^x/b^x.$$

(Det är samma lagar som för heltalsexponenter). För *n:te rötter* gäller då (för $b > 0$) bl.a. följande räkneregler:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{b} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{b}} (= b^{\frac{1}{mn}}),\ (\sqrt[n]{b})^m = \sqrt[n]{b^m} (= b^{\frac{m}{n}}),$$
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{och} \quad \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}.$$

För uttrycken $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a+b}$ och $\sqrt[n]{a-b}$ finns inga allmänna formler. Exempelvis är i allmänhet $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$, (alltför vanligt fel att tro motsatsen!).

Exempel: a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$ för $a \geq 0$.

b) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}} = (2^{1/3})^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{18}} = \sqrt[18]{2}$

c) $\sqrt[12]{125} = \sqrt[12]{5^3} = (5^3)^{\frac{1}{12}} = 5^{\frac{3}{12}} = 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$

d) $\sqrt[2n]{x^2} = \sqrt[n]{\sqrt{x^2}} = \sqrt[n]{|x|}$

Ö52. Förenkla a) $27^{1/3}$ b) $4^{-0,5}$ c) $(\sqrt{8})^{2/3}$ d) $2^{1/3} \cdot 2^{-4/3}$ e) $3^{1/2}/9^{-3/4}$

f) $3^{-2/3}/(1/3)^{-4/3}$ g) $(0,0016)^{-0,25}$

Ö53. Förenkla a) $\sqrt[6]{9}$ b) $\sqrt[6]{8}$ c) $\sqrt[3]{-24}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$ e) $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$

f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$ g) $4/\sqrt[3]{16}$ h) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[6]{9} + \sqrt{12} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

Ö54. Bestäm de reella rötterna till a) $x^8 = 16$ b) $x^5 = 243$

c) $64x^6 - 27 = 0$ d) $x^3 + 8 = 0$ e) $x^4 + 8 = 0$

Ö55. Förenkla (och angiv definitionsmängd): a) $\sqrt[3]{3a^2} \cdot \sqrt[3]{9a}$
b) $\sqrt{x}/\sqrt[4]{x}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$ e) $\sqrt[4]{a^3}/\sqrt[3]{a}$ f) $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

1.13 Allmänna potenser (Potens- och exponentialfunktioner)

Vi har ovan definierat vad som menas med uttrycket b^x, då $b > 0$ och $x = m/n$ är ett rationellt tal. Man kan allmännare definiera uttrycket b^x för $b > 0$ och alla reella x, så att potens-(*exponential*-)lagarna gäller (för a och $b > 0$):

$$b^{x+y} = b^x \cdot b^y, \quad b^{x-y} = b^x/b^y, \quad b^{-y} = 1/b^y, \quad b^{x \cdot y} = (b^x)^y,$$
$$a^x \cdot b^x = (ab)^x, \; a^x/b^x = (a/b)^x$$

b^x kallas för en potens av b, b kallas bas och x kallas exponent.

OBS: Man skiljer på potens- och exponentialfunktioner:

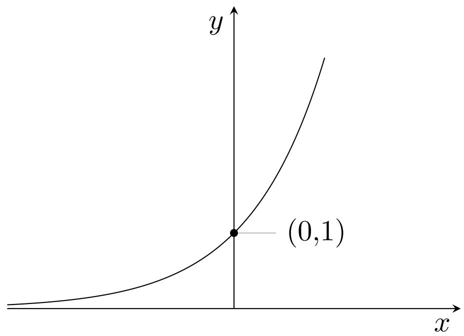
Potensfunktion: $f(x) = x^a$ (x = variabel, a = konstant)
Exponentialfunktion: $f(x) = b^x$ (x = variabel, b = konstant > 0).

OBS:

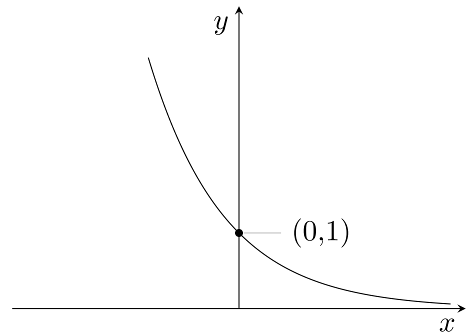
1) $b^x > 0$ för alla x, d.v.s. kurvan $y = b^x$ ligger ovanför x-axeln,

2) $b^0 = 1$, d.v.s. $y = b^x$ går genom punkten $(x,y) = (0,1)$ för alla $b > 0$,

3) $y = f(x) = b^x$ är $\begin{cases} \text{växande (för växande } x\text{), om } b > 1 \\ \text{avtagande (för växande } x\text{), om } 0 < b < 1. \end{cases}$



$y = b^x, b > 1$



$y = b^x, 0 < b < 1$

Av speciellt intresse är (den naturliga) exponentialfunktionen:

$\underline{f(x) = e^x}$ med basen $e = 2{,}71828\ldots$.

[Tangenten till $y = e^x$ i punkten $(x,y) = (0,1)$ har riktningsvinkeln $45°$]. För e^x gäller alltså att

$$\boxed{e^0 = 1, \quad e^x > 0 \text{ för alla } x, \quad e^x \text{ växande för alla } x}$$

samt exponentiallagarna:

$$\boxed{e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \quad e^{x-y} = e^x/e^y, \quad e^{-y} = 1/e^y \text{ och } e^{x \cdot y} = (e^x)^y}$$

OBS: e^{x+y} är (i allmänhet) ej lika med $e^x + e^y$. (Alltför vanligt fel att tro motsatsen). Exempelvis är, för $x = y = 0$, $e^{x+y} = e^0 = 1$ men $e^x + e^y = e^0 + e^0 = 2$.

Exempel: (förenkla): $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 3^2 = 9$.

Exempel: Lös ekvationen $2^x + 2^{x-1} = 6$.

Lösning: Ekvationen kan skrivas $2^{x-1}(2 + 1) = 6$, d.v.s. $2^{x-1} = 2$, varför $x - 1 = 1$, d.v.s. $\underline{x = 2}$.

[Alternativ lösningsmetod: Sätt $2^x = z$. (Genomför räkningarna!)]

Exempel: Bestäm reella lösningar till ekvationen $e^{2x} + e^x - 2 = 0$.

Lösning: Sätt $e^x = z$. Då är $e^{2x} = (e^x)^2$ och vi får ekvationen $z^2 + z - 2 = 0$ med rötter $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$, d.v.s. $z_1 = 1$ och $z_2 = -2$.

Fall 1: $e^x = z_1 = 1 = e^0$ ger $x_1 = 0$.

Fall 2: $e^x = z_2 = -2$ är en orimlighet, då $e^x > 0$ för alla reella x.

Svar: Ekvationen har den reella roten $x_1 = 0$.

Ö56. Förenkla a) $(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ b) $e^{\sqrt{2}} \cdot e^{\sqrt{8}} \cdot e^{-\sqrt{18}}$ c) $8^{\sqrt{2}} \cdot 2^{-\sqrt{8}}/(\sqrt{2})^{\sqrt{8}}$

Ö57. Visa att a) $2^{\sqrt{2}} < \sqrt{8}$ b) $2^{\sqrt{2}} > \sqrt[5]{128}$ c) $2^{\sqrt{2}} \cdot 2^{\sqrt{8}} > 4^{2,1}$

Ö58. Bestäm reella lösningar till a) $2^x = 64$ b) $4^x = 8$ c) $4^x = -8$

d) $5^{x+1} + 3 \cdot 5^x = 8$ e) $3^x + 2 \cdot 3^{x-1} = 45$ f) $6 \cdot 4^x - 4^{x+2} = 16$

g) $4 \cdot 8^x + 3 \cdot 2^{3x+1} = 5$

Ö59. Bestäm reella lösningar till a) $e^{2x} + 2 \cdot e^x = 3$

b) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ c) $2^{2x} + 2^{x+1} = 2^{x-1} + 1$ d) $2^x + 2^{3-x} = 9$

e) $e^{3x} + 4e^{2x} - e^x - 4 = 0$

1.14 Logaritmer

Vi har exempelvis att $100 = 10^2$ och att $0{,}1 = 10^{-1}$ och frågar oss om t.e.x $3 = 10^x$ för något x?

Funktionen $y = 10^x$ är definierad för alla reella x, $-\infty < x < \infty$. Vidare är $y = 10^x$ strängt växande för alla x samt antar alla reella *positiva* y-värden, $0 < y < \infty$. (Rita grafen till $y = 10^x$). Det betyder att till varje $y > 0$, (t.ex. $y = 3$) finns ett och endast ett värde x för vilket $10^x = y$. Detta x-värde kallas (tio-)logaritmen för y och skrives ${}^{10}\log y$ eller $\lg y$. Vi har alltså följande:

Definition: $x = \lg y \Leftrightarrow y = 10^x$ för $y > 0$.

Exempelvis är $\lg 100 = 2$ och $\lg 0{,}1, = -1$. Vidare är $3 = 10^x$ för $x = \lg 3 \approx 0{,}4771$. Av definitionen följer direkt, ty $y = 10^x = 10^{\lg y}$ och $x = \lg y = \lg 10^x$, att

$$\boxed{y = 10^{\lg y} \quad (\text{för } y > 0)} \quad \text{och} \quad \boxed{\lg 10^x = x \quad (\text{för alla reella } x).}$$

Speciellt: $y = 1$ kan skrivas $y = 1 = 10^0$, varför $\lg 1 = \lg 10^0 = 0$. På samma sätt är $y = 10 = 10^1$, varför $\lg 10 = \lg 10^1 = 1$.

Alltså är $\boxed{\lg 1 = 0 \quad \text{och} \quad \lg 10 = 1.}$

Vidare är $\boxed{\lg y < 0 \quad \text{för } 0 < y < 1}$ och $\boxed{\lg y > 0 \quad \text{för } y > 1.}$

Exponentialfunktionen $y = e^x$, där $e = 2{,}71828\ldots$, är (liksom $y = 10^x$) definierad och strängt växande för alla x, $-\infty < x < \infty$, samt antar alla positiva y-värden. Till varje $y > 0$ finns alltså ett och endast ett x-värde, $-\infty < x < \infty$, för vilket $e^x = y$. Detta x-värde kallas e-logaritmen eller den **naturliga logaritmen** för y och skrives ${}^{e}\log y$ eller vanligare $\ln y$. Vi har alltså följande

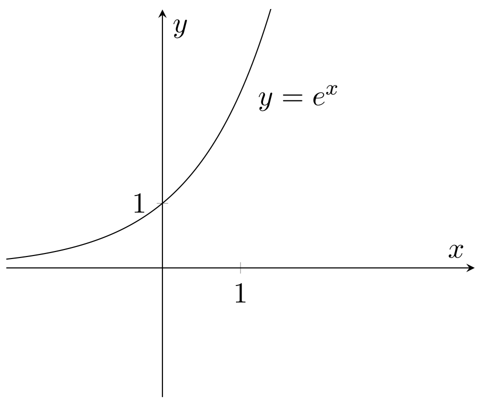
Definition: $x = \ln y \Leftrightarrow y = e^x$ för $y > 0$.

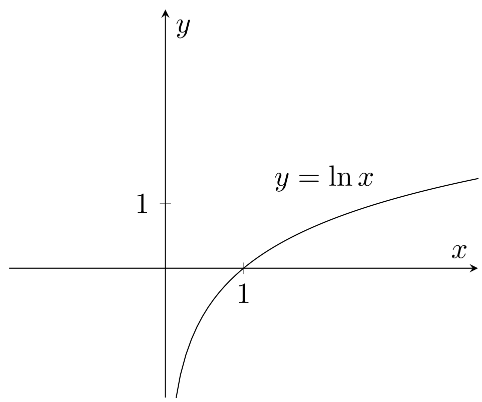
Av definitionen följer direkt att

$y = e^{\ln y}$ (för $y > 0$)	$\ln e^x = x$ (för alla reella x)
$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$
$\ln y < 0 \quad$ för $0 < y < 1$	$\ln y > 0 \quad$ för $y > 1$

OBS: $\ln y$ och $\lg y$ är definierade endast för $y > 0$.

Graferna för $y = e^x$ och $y = \ln x$:





OBS: Grafen till $y = \ln x$, d.v.s. $x = e^y$ fås genom *spegling* av grafen till $y = e^x$, d.v.s. $x = \ln y$, i räta linjen $y = x$. [Alltså $y = \ln x$ fås ur $y = e^x$ genom byte av variablerna x och y].

Ö60. Förenkla a) $\lg 1000$ b) $\lg 0{,}01$ c) $10^{\lg 4}$ d) $10^{\lg 0{,}7}$
e) $10^{-\lg 4}$ f) $10^{-\lg 0{,}5}$

Ö61. Förenkla a) $\ln e^2$ b) $\ln \sqrt{e}$ c) $\ln \dfrac{1}{e}$ d) $\ln \left(\dfrac{1}{e}\right)^2$
e) $e^{\ln 7}$ f) $e^{-\ln 3}$

Ö62. Lös ekvationerna a) $\ln x = 0$ b) $\lg x = 1$ c) $\ln x = 2$
d) $\lg x = -4$ e) $2 \cdot \lg x = 3$

Ö63. Bestäm reella lösningar till a) $10^x = 4$ b) $2 \cdot e^x = 3$

c) $10^x + 2 \cdot 10^{x+1} = 42$ d) $10^x - 10^{x-1} = 2{,}7$ e) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$

f) $e^x + 6 \cdot e^{-x} = 5$

För $\ln y$ och $\lg y$ kan ur potenslagarna härledas följande **logaritmlagar** (för y och $z > 0$):

$\ln(y \cdot z) = \ln y + \ln z$	$\lg(y \cdot z) = \lg y + \lg z$
$\ln \frac{y}{z} = \ln y - \ln z$	$\lg \frac{y}{z} = \lg y - \lg z$
$\ln y^p = p \cdot \ln y$	$\lg y^p = p \cdot \lg y$

Av den andra lagen följer speciellt:

$$\boxed{\ln \frac{1}{z} = -\ln z \quad \text{och} \quad \lg \frac{1}{z} = -\lg z}$$

För $\ln(y+z)$, $\ln(y-z)$, $\lg(y+z)$ och $\lg(y-z)$ finns inga formler.

OBS: $\ln(y+z)$ är <u>ej</u> lika med $\ln y + \ln z$. (Mycket vanligt fel att tro motsatsen!!). (Visa med ett exempel!)

Exempel: $\lg 0{,}0003 = \lg(3 \cdot 10^{-4}) = \lg 3 + \lg\ 10^{-4} = \lg 3 - 4 \approx 0{,}47771 - 4 =$
$= -3{,}5229$.

Anmärkning: Varje tal $y > 0$ kan skrivas $y = y_0 \cdot 10^k$, där $1 \leq y_0 < 10$ och k heltal. [Detta kan användas för beräkning av $\lg y$, då $\lg y_0$ finns i tabell för $1 \leq y_0 < 10$].

Exempel: (förenkla): $\ln 8 - 6 \cdot \ln \sqrt{2} = \ln 2^3 - 6 \cdot \ln 2^{1/2} = 3 \ln 2 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln 2 = 0$.

Exempel: Lös ekvationen $2 \ln(x-1) + \ln(x+1) = 3 \ln x$.

Lösning: För att logaritmerna i ekvationen skall vara definierade måste $x - 1 > 0$, $x + 1 > 0$ och $x > 0$, d.v.s. $x > 1$. För $x > 1$ kan ekvationen skrivas (med logaritmlagarna):

$\ln(x-1)^2 + \ln(x+1) = \ln x^3$ eller $\ln(x-1)^2 \cdot (x+1) = \ln x^3$.
[Men $\ln y = \ln z \Rightarrow y = z$]. Härav fås $(x-1)^2 \cdot (x+1) = x^3$, d.v.s. $x^3 - x^2 - x + 1 = x^3$ eller $x^2 + x - 1 = 0$. Denna ekvation har rötterna $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}6 < 1$ och $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}6 < 1$. D.v.s. både x_1 och x_2 ligger utanför definietionsområdet $x > 1$.

Svar: Den givna ekvationen <u>saknar</u> (reella) rötter.

Anmärkning: Ekvationen $\ln(x-1)^2 + \ln(x+1) = 3 \ln x$ har roten $x_1 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}6$.

OBS: $y = e^x$ och $y = 10^x$ är båda strängt växande funktioner, varav fås (för y och $z > 0$):

$$\boxed{\ln y = \ln z \Leftrightarrow y = z} \quad \text{och} \quad \boxed{\lg y = \lg z \Leftrightarrow y = z}$$

Ö64. Förenkla <u>a</u>) $\lg 30 - \lg 0{,}3$ <u>b</u>) $2 \ln 8 - 3 \ln 4 + 20 \ln 1$

<u>c</u>) $3 \ln 2 + 2 \ln 3 - 4 \ln \sqrt{6}$ <u>d</u>) $2 \lg 20 - 6 \lg \sqrt{2} + 5 \lg 1 + \lg 0{,}01$

Ö65. Lös ekationerna <u>a</u>) $\ln(\ln x) = \ln 3$ <u>b</u>) $2 \lg(x-1) + \lg 2 = 3 \lg 4$

<u>c</u>) $3 \ln 2 + \ln(x-1) - \ln x = \ln 7$ <u>d</u>) $\lg x + \lg(x-2) = \lg 3$

<u>e</u>) $\ln(2-x) + 2 \ln x = 3 \ln(1-x)$ <u>f</u>) $\ln x + \ln(x-1) = 0$

<u>g</u>) $\lg x - \lg(x-1) = 1$ <u>h</u>) $\ln(x+2) - \ln(2-x) = 3 \ln 2$

i) $2\lg x - 3\lg 4 = -2$ j) $\ln(4x) - 2\ln(1-x) + \ln 5 = 3\ln 2$

Logaritmer med (godtycklig) bas b definieras (om $b > 0$, $b \neq 1$):

$$x = {}^{b}\log y \Leftrightarrow y = b^x, \quad \text{för } y > 0.$$

${}^{b}\log y$ kallas *b-logaritmen* av y. Vi har tidigare studerat specialfallen:

$${}^{10}\log y = \lg y \quad \text{och} \quad {}^{e}\log y = \ln y$$

Av definitionen följer att

$$y = b^{{}^{b}\log y} (\text{för } y > 0),\ {}^{b}\log b^x = x (\text{för alla } x),$$
$${}^{b}\log 1 = 0 \quad \text{och} \quad {}^{b}\log b = 1$$

Av potenslagarna och definitionen på ${}^{b}\log y$ följer *logaritmlagarna*:

$${}^{b}\log(yz) = {}^{b}\log y + {}^{b}\log z,\ \ {}^{b}\log y^p = p \cdot {}^{b}\log y$$
$${}^{b}\log \frac{y}{z} = {}^{b}\log y - {}^{b}\log z,\ \ {}^{b}\log \frac{1}{z} = -{}^{b}\log z$$

Mellan logaritmer med *olika baser* råder följande samband:

$${}^{a}\log y = \frac{{}^{b}\log y}{{}^{b}\log a}, \quad (\text{t.ex.}) : \ln y = \frac{\lg y}{\lg e}$$

Speciellt för $y = b$ fås: ${}^{a}\log b = \dfrac{1}{{}^{b}\log a}$ och t.ex. $\ln 10 = \dfrac{1}{\lg e}$.

Exempel: (beräkna) ${}^{2}\log \frac{1}{32} = -{}^{2}\log 32 =$ [Skriv 32 med basen 2] $=$
$= -{}^{2}\log 2^5 = (-1) \cdot 5 \cdot {}^{2}\log 2 = -5 \cdot 1 = -5$

Ö66. Bestäm a) ${}^{3}\log 3$ b) ${}^{2}\log 8$ c) ${}^{3}\log \dfrac{1}{27}$ d) ${}^{100}\log 10$
e) $2^{{}^{2}\log 3}$ f) $4^{-{}^{4}\log 5}$

Ö67. Förenkla a) ${}^{5}\log 1000 - {}^{5}\log 40$ b) ${}^{4}\log 12 - 0{,}5 \cdot {}^{4}\log 36$

Ö68. Lös ekvationen a) ${}^{2}\log x + {}^{2}\log 5 = 4$ b) $2 \cdot {}^{5}\log x - {}^{5}\log(x-4) = 2$

Ö69. Förenkla a) ${}^{3}\log 2 \cdot {}^{2}\log 3$ b) ${}^{5}\log 4 \cdot {}^{2}\log 5$ c) ${}^{8}\log 7 \cdot {}^{7}\log 2$

1.15 Summabeteckning

Man skriver $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ och $\boxed{a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k}$ (för $m \le n$). Speciellt är $\sum_{k=n}^{n} a_k = a_n$.

Man kan också skriva

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} \quad \text{eller} \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

Alltså är $\boxed{\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1} = \sum_{k=m+2}^{n+2} a_{k-2} = \ldots}$

och $\boxed{\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-1}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{k=m-2}^{n-2} a_{k+2} = \ldots}$

Exempel: (beräkna) $\sum_{k=3}^{7} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 135$

Ö70. Beräkna a) $\sum_{k=2}^{5} k$ b) $\sum_{k=1}^{5} (k+2)^2$ c) $\sum_{k=-3}^{4} k^3$ d) $\sum_{k=6}^{6} \lg k$ e) $\sum_{k=1}^{9} \ln \frac{k+1}{k}$

Ö71. Förenkla a) $\sum_{k=0}^{7} a_k - \sum_{k=1}^{7} a_{k-1}$ b) $\sum_{k=0}^{10} a_{k+2} - \sum_{k=0}^{10} a_{k+1}$

1.16 Aritmetiska och geometriska talföljders summor

A) Talföljden $t_1 = a$, $t_2 = a + d$, $t_3 = a + 2d, \ldots, t_n = a + (n-1)d$ kallas för en (ändlig) aritmetisk talföljd med differensen d. Man kan visa att talföljdens summa

$$\boxed{\begin{aligned} &S_n = \sum_{k=1}^{n} [a + (k-1)d] = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a + (n-1)d), \text{ är lika med} \\ &S_n = n \cdot a + n \cdot \frac{(n-1)d}{2} = n \cdot \frac{t_1 + t_n}{2}, \end{aligned}}$$

d.v.s. S_n är antalet termer $[n]$ gånger medelvärdet $\left[\frac{t_1+t_n}{2}\right]$. Speciellt är (om $a = 1, d = 1$):

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

B) Talföljden $t_1 = a$, $t_2 = a{\cdot}x$, $t_3 = a{\cdot}x^2, \ldots, t_n = a{\cdot}x^{n-1}$ kallas för en (ändlig) <u>geometrisk talföljd</u> med kvoten x. Talföljdens summa är

$$\boxed{s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a\cdot x^k = a + a\cdot x + a\cdot x^2 + \ldots + a\cdot x^{n-1} = a\cdot\frac{1-x^n}{1-x} \quad \text{för } x \neq 1.}$$

Bilda $x\cdot s_n = a{\cdot}x + a{\cdot}x^2 + \ldots + a{\cdot}x^n$. Då är $s_n - x\cdot s_n = a - a{\cdot}x^n$, d.v.s. $(1-x)\cdot s_n = a(1-x^n)$, som ger påståendet.

C) Man kan visa att om $|x| < 1$, så går x^n mot noll då $n \to \infty$. Härav följer att $s_n = a\cdot\dfrac{1-x^n}{1-x} \to s = \dfrac{a}{1-x}$, då $n \to \infty$.

För den (oändliga) <u>geometriska seriens</u> summa gäller alltså:

$$\boxed{s = \sum_{k=0}^{\infty} a\cdot x^k = a + a\cdot x + a\cdot x^2 + \ldots = \frac{a}{1-x} \quad \text{för } |x| < 1.}$$

Anmärkning: En (oändlig) *serie:* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ säges vara *konvergent* och ha en summa s, om $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \to s$, då $n \to \infty$.

Exempel: $x^m + x^{m+1} + \ldots + x^n = x^m[1 + x + \ldots + x^{n-m}] = x^m \cdot \frac{1-x^{n-m+1}}{1-x} =$
$= \frac{x^m - x^{n+1}}{1-x}$ för $m \leq n$, $x \neq 1$.

(Härav följer också att $x^m + x^{m+1} + \ldots = \dfrac{x^m}{1-x}$ för $|x| < 1$).

Ö72. Beräkna <u>a</u>) $1+2+3+\ldots+99$ <u>b</u>) $\displaystyle\sum_{k=0}^{200} k$ <u>c</u>) $1+3+5+\ldots+99$

<u>d</u>) $1+3+5+\ldots+(2n-1)$

Ö73. Beräkna <u>a</u>) $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{10}$ <u>b</u>) $1 - 1/2 + 1/2^2 - 1/2^3 + \ldots + 1/2^{10}$

<u>c</u>) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot 2^k$ <u>d)</u> $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k$

Ö74. Beräkna a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \ldots$ c) $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}$, (för $|x| < 1$) e) $\sum_{k=3}^{\infty} e^{-kx}$, (för $x > 0$)

f) $\frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243} + \ldots$

Ö75. För vilka x är a) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 3$ b) $x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots = 1/3$

c) $x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = 1$?

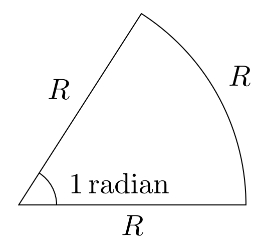
Ö76-79: (Reserv)

Kapitel 2

Trigonometri

2.1 Vinkelmätning

Vinklar kan mätas i (delar av) varv, grader eller radianer. (Vi använder vanligen radianer). Med 1 radian menas storleken av centrumvinkeln i en cirkelsektor, där periferibågen är lika lång som radien R. [Längden av bågen i en cirkelsektor med vinkeln v radianer blir alltså $v \cdot R$ (längdenheter)].

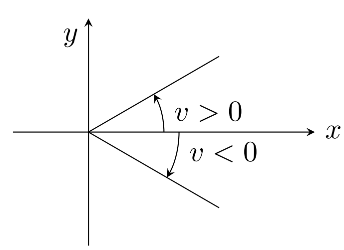


Sambanden mellan de olika enheterna för vinkelmätning blir, (ty cirkelns omkrets är $2\pi R$):

1 varv = 360° = 2π radianer, varav fås
$1° = \dfrac{\pi}{180}$ radianer och 1 radian $= \dfrac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$

(Ofta skriver man ej ut enheten radian utan skriver t.ex. $\pi = 180°$).

En vinkel räknas positiv, om den mäts *moturs*, och negativ, om den mätes *medurs*, (vanligen räknat från positiva x-axeln i ett xy-koordinatssystem).



Övningsexempel:

Ö80. Hur många grader och radianer är a) 1/2 varv b) 1/8 varv

c) 3 varv d) -1/3 varv e) -1/6 varv f) 10 varv? (Rita figur!)

Ö81. Omvandla till radianer: a) 90° b) 30° c) −45° d) −270°

e) 18° f) 150° g) −110°

Ö82. Omvandla till grader: a) 3π b) $-\pi/2$ c) $3\pi/4$ d) $5\pi/12$

Ö83. Beräkna längden av periferibågen i en cirkelsektor med

a) centrumvinkeln $v = 60°$ och radien $R = 2$ (längdenheter)

b) $v = 150°$ och $R = 5$ c) $v = 300°$ och $R = 4/3$.

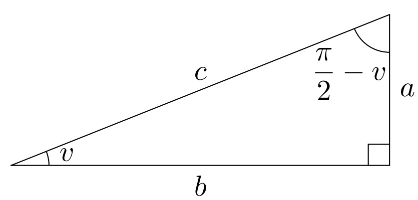
Ö84. Bestäm vinklen mellan två (närliggande) sidor i en regelbunden

a) 6-hörning b) 5-hörning c) n-hörning. [Ledning: Vinkelsumman i en triangel

är $180° = \pi$ (radianer)].

2.2 Rätvinkliga trianglar

I en rätvinklig triangel är en vinkel $90° = \pi/2$ (radianer). Om en av de övriga vinklarna är v så blir den tredje vinkeln $\pi/2 - v$, ty vinkelsumman i en triangel är $180° = \pi$. Vinkeln $\pi/2 - v$ kallas komplementvinkeln till v. Den sida, som står mot den räta vinkeln, kallas hypotenusa, och de båda övriga sidorna kallas kateter.



För rätvinkliga trianglar gäller: $\boxed{\textbf{Pythagoras' sats: } c^2 = a^2 + b^2.}$

Vi definierar nu **de trigonometriska funktionerna** sinus, cosinus, tangens och cotangens för vinklar mellan 0^0 och 90^0 (dvs. mellan 0 och $\frac{\pi}{2}$) med

$\sin v = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusa}}$	$\tan v = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}$
$\cos v = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusa}}$	$\cot v = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{närliggande katet}}{\text{motstående katet}}$

Varav fås att

$$\boxed{a = c \cdot \sin v, \quad b = c \cdot \cos v, \quad a = b \cdot \tan v, \quad b = a \cdot \cot v}$$

Av definitionen följer direkt att

$$\boxed{\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{1}{\cot v}, \quad \cot v = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{\tan v}}$$

Pythagoras' sats ger: $\boxed{\sin^2 v + \cos^2 v = 1, (\textbf{trigonometriska ettan})}$

OBS: $\sin^2 v = (\sin v)^2 = \sin v \cdot \sin v$ och $\cos^2 v = (\cos v)^2 = \cos v \cdot \cos v$.

OBS: $(\sin v)^2$ är ej lika med $\sin^2 v^2$. (alltför vanligt fel).

Av definitionen på komplementvinkel följer vidare att

$$\sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \qquad \tan v = \cot\left(\frac{\pi}{2} - v\right),$$
$$\cos v = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \qquad \cot v = \tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

d.v.s. sinus för en vinkel är lika med consinus för komplementvinkeln, o.s.v. Om vinkeln v avtar mot 0, så går (vid fixt c) kateten a mot 0, varför

$\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\tan 0 = 0$, samt $\cot v \to +\infty$, då v avtar mot noll.

Då $v = \dfrac{\pi}{2} = 90^\circ$ är komplementvinkel till 0 fås att

$\sin\dfrac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$, $\cos\dfrac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$, $\cot\dfrac{\pi}{2} = \cot 90^\circ = 0$

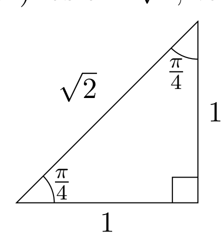
samt att $\tan v \to +\infty$, då v växer mot $\dfrac{\pi}{2} = 90^\circ$.

Vi härleder nu de **trigonometriska funktionernas värden för** 45°**,** 60° **och** 30°:

OBS: Om man inte kan alla dessa värden utantill, *måste man snabbt kunna göra en härledning!*

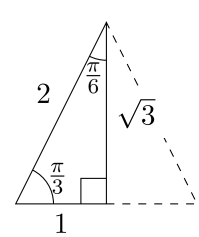
A) För $v = \dfrac{\pi}{4} = 45^\circ$ blir den rätvinkliga triangeln en halv kvadrat: Om (för enkelhets skull) $a = 1$, så är också $b = 1$ och med Pythagoras' sats ($c^2 = a^2 + b^2$) fås $c = \sqrt{2}$, varför

$\sin\dfrac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,	$\tan\dfrac{\pi}{4} = \tan 45^\circ = 1$
$\cos\dfrac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,	$\cot\dfrac{\pi}{4} = \cot 45^\circ = 1$



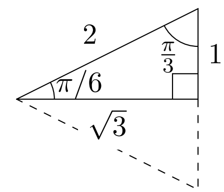
B) För $v = \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ$ kan den rätvinkliga triangeln uppfattas som en halv liksidig triangel. (I en liksidig triangel är alla vinklarna lika med 60°, varför vinklarna i en halv liksidig triangel är 60°, 90° och 30°). Om $b = 1$, så är $c = 2$ och med Pythagoras' sats fås $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{3}$, varför

$\sin\dfrac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,	$\tan\dfrac{\pi}{3} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$
$\cos\dfrac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$,	$\cot\dfrac{\pi}{3} = \cot 60^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



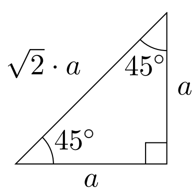
C) Om $v = \dfrac{\pi}{6} = 30^\circ$ så kan den rätvinkliga triangeln också kompletteras till en liksidig triangel. [Eller: Eftersom $v = 30^\circ$ är komplementvinkel till 60° fås $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ o.s.v. Jämför figuren ovan.]

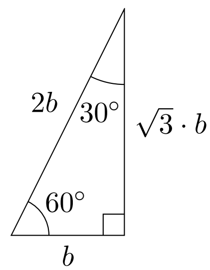
$\sin\dfrac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$,	$\tan\dfrac{\pi}{6} = \tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$\cos\dfrac{\pi}{6} = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,	$\cot\dfrac{\pi}{6} = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$



OBS: 1) Förhållandet mellan sidorna i en (godtycklig) *halv kvadrat* är $1 : 1 : \sqrt{2}$.

2) Förhållandet mellan sidorna i en *halv liksidig triangel* är $1 : \sqrt{3} : 2$.

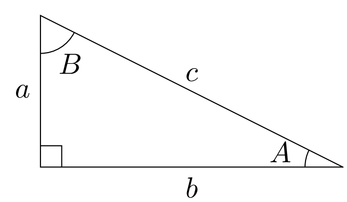




Ö85. Bestäm värdet av a) $2\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}\cdot\cot\dfrac{\pi}{3}$ b) $\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{\pi}{6} - \cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}$

c) $(\sin 60^\circ + \sin 45^\circ)(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ)$ d) $(\tan 60^\circ - \tan 45^\circ)/(1 + \tan 60^\circ \cdot \tan 45^\circ)$.

Exempel: *Solvera* en rätvinklig triangel med $b = 2{,}0$ och $B = 40^\circ$ [dvs. *bestäm de sidor och vinklar, som ej är givna*].



Lösning: Vinkeln $A = 90^\circ - B = 50^\circ$. Nu är $\cos A = b/c$ varför $c = b/\cos A = 2{,}0/\cos 50^\circ \approx 2{,}0/0{,}643 \approx 3{,}1$. [$\cos 50^\circ$ fås med räknedosa eller ur tabell]. Vidare är $\tan A = a/b$, varför $a = b\cdot\tan A = 2{,}0\cdot\tan 50^\circ \approx 2{,}0\cdot 1{,}19 \approx 2{,}4$.

Svar: $A = 50^\circ$, $c \approx 3{,}1$ och $a \approx 2{,}4$.

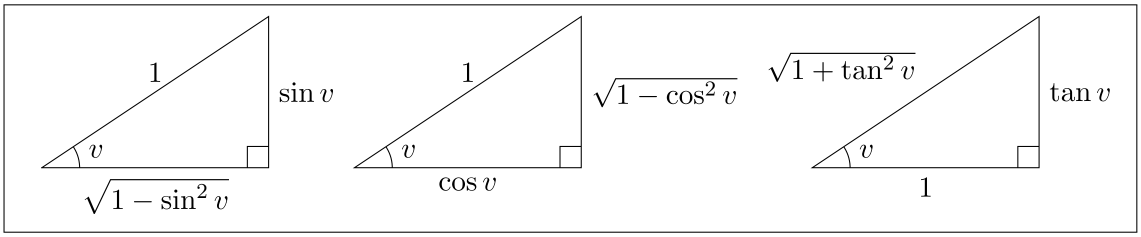
Anmärkning: Man bör vid numerisk räkning använda beteckningen "≈", som betyder "approximativt lika med".

OBS: $\sin A$, $\cos B$ o.s.v. ändras naturligtvis inte om en triangel vrides eller spegelvändes, ty $\sin A =$ (motstående katet): (hypotenusan) o.s.v.

Ö86. Solvera följande rätvinkliga trianglar (beteckningar enligt figur ovan):

a) $c = 4{,}0$ och $A = 35^\circ$ b) $a = 3{,}0$ och $A = \dfrac{\pi}{5}$ c) $a = 2{,}0$ och $c = 3{,}0$
d) $a = 2{,}0$ och $b = 3{,}0$ e) $b = 5{,}0$ och $B = 55^\circ$.

Samband mellan de trigonometriska funktionerna för samma vinkel, mellan 0° och 90°, fås med hjälp av Pythagoras' sats:



Man får ur figurerna följande allmänna samband (för $0 < v < \frac{\pi}{2}$)

1) $\cos v = \sqrt{1-\sin^2 v}$, $\qquad \tan v = \sin v/\sqrt{1-\sin^2 v}$

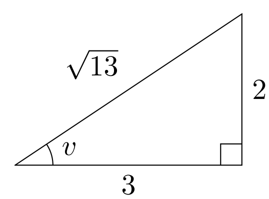
2) $\sin v = \sqrt{1-\cos^2 v}$, $\qquad \tan v = \sqrt{1-\cos^2 v}/\cos v$

3) $\sin v = \tan v/\sqrt{1+\tan^2 v}$, $\qquad \cos v = 1/\sqrt{1+\tan^2 v}$

OBS: I dessa formler förutsättes att $0 < v < \dfrac{\pi}{2}$.

Exempel: Bestäm $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 2/3$ och $0 < v < \dfrac{\pi}{2}$.

Lösning: Sätt in i formlerna ovan, eller (bättre!): rita en rätvinklig triangel med kateterna $a = 2$ och $b = 3$. Då är $\tan v = 2/3$. Enligt Pythagoras' sats blir då hypotenusan $c = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$, varför $\sin v = 2/\sqrt{13}$ och $\cos v = 3/\sqrt{13}$.



Ö87. Bestäm (för $0 < v < \dfrac{\pi}{2}$) a) $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 3/5$, [Ledning: Rita en triangel med $a = 3$ och $c = 5$] b) $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 2/3$

c) $= \sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 1/3$ d) $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 0{,}4$

e) $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 1/2$ f) $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 24/7$

g) $\sin v$ och $\cos v$, om $\cot v = 0{,}7$

2.3 De trigonometriska funktionerna för godtyckliga vinklar

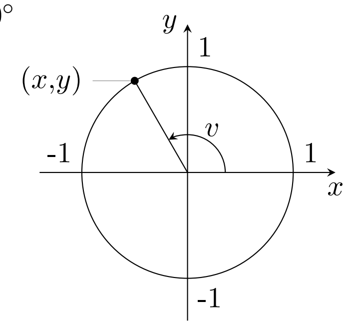
xy-planet är uppdelat i fyra kvadranter:

	y	
Andra kvadranten	Första kvadranten	x
Tredje kvadranten	Fjärde kvadranten	

Som vi tidigare påpekat räknas vinklar (från positiva x-axeln) *positiva* moturs och *negativa* medurs. Vinklar mellan 0° och 90°, dvs. mellan 0 och $\frac{\pi}{2}$, ligger i första kvadranten, vinklar mellan $\frac{\pi}{2}$ och π i andra, mellan π och $3\pi/2$ i tredje, mellan $3\pi/2$ och 2π i fjärde, mellan 2π och $5\pi/2$ i första o.s.v. Men även vinklar mellan $-\pi/2$ och 0 kommer i fjärde kvadranten, vinklar mellan $-\pi$ och $-\pi/2$ i tredje o.s.v.

Ö88. I vilken kvadrant ligger vinkeln a) $5\pi/4$ b) 500° c) $-200°$

d) 1000° e) $27\pi/4$ f) $-100\pi/3$ g) $-10000°$?

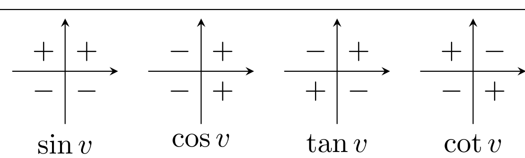


Vi ger nu *definitionerna av de trigonometriska funktionerna* för godtyckliga vinklar, dvs. även för vinklar utanför intervallet 0 till $\pi/2$. Antag att (x,y) är en punkt på *enhetscirkeln* (cirkel med radien = 1 och medelpunkten i origo).

Definition: $\begin{cases} \sin v = y \\ \cos v = x \end{cases}$ $\begin{cases} \tan v = \dfrac{y}{x} \quad \text{för} \quad x \neq 0, \quad \text{dvs. } v \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \\ \\ \cot v = \dfrac{x}{y} \quad \text{för} \quad y \neq 0, \quad \text{dvs. } v \neq n\pi \end{cases}$

[Vi ser att dessa definitioner stämmer överens med de tidigare. Ty, om $0 < v < \pi/2$, så ligger punkten (x,y) i första kvadranten, där $x > 0$ och $y > 0$. Vi får alltså en rätvinklig triangel med hypotenusan $c = 1$ och kateterna $a = y$ och $b = x$, varför $\sin v = a/c = y/1 = y$ o.s.v.]

Eftersom $\sin v = y$ blir $\sin v$ *positiv* för vinklar i första och andra kvadranten och *negativ* i tredje och fjärde. Liknande regler fås för $\cos v$, $\tan v$ och $\cot v$:



Av definitionerna följer direkt, att

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{1}{\cot v} \qquad \cot v = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{\tan v}$$

$$-1 \le \sin v \le +1,\ \text{dvs.}\ |\sin v| \le 1 \quad \text{för } \underline{\text{alla}} \text{ vinklar } v$$

$$-1 \le \cos v \le +1,\ \text{dvs.}\ |\cos v| \le 1 \quad \text{för } \underline{\text{alla}} \text{ vinklar } v$$

$\sin 0 = 0$	$\sin \frac{\pi}{2} = 1$	$\sin \pi = 0$	$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$	$\sin 2\pi = 0$
$\cos 0 = 1$	$\cos \frac{\pi}{2} = 0$	$\cos \pi = -1$	$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$	$\cos 2\pi = 1$

$\tan 0 = 0$	$\cot \frac{\pi}{2} = 0$	$\tan \pi = 0$	$\cot \frac{3\pi}{2} = 0$	$\tan 2\pi = 0$	o.s.v.

$\tan v \to +\infty$, då v <u>växer</u> mot $\frac{\pi}{2}$	$\cot v \to +\infty$, då v <u>avtar</u> mot 0
$\tan v \to -\infty$, då v <u>avtar</u> mot $\frac{\pi}{2}$	$\cot v \to -\infty$, då v <u>växer</u> mot 0

Vidare är, (jämför figur nedan, i slutet av paragrafen).

$$\sin v = \sin(v + 2\pi) = \sin(v + n \cdot 2\pi), \quad \text{där} \quad n = \text{ heltal}$$
$$\cos v = \cos(v + 2\pi) = \cos(v + n \cdot 2\pi), \quad \text{där} \quad n = \text{ heltal}$$

dvs. sinus och cosinus är <u>periodiska</u> funktioner med <u>perioden 2π</u>.

Exempel: Bestäm $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$

Lösning: $-\frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 2\pi$, varför $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$.

Ö89. Bestäm <u>a</u>) $\cos 13\pi$ <u>b</u>) $\sin(-13\pi/2)$ <u>c</u>) $\sin(13\pi/3)$ <u>d</u>) $\cos(13\pi/6)$

<u>e</u>) $\tan(137\pi)$ <u>f</u>) $\tan(137\pi/4)$.

Av Pytagoras sats följer att ekvationen för *enhetscirkeln* är <u>$x^2 + y^2 = 1$</u>, (vilket gäller i alla kvadranterna). Av definitionen på sinus och cosinus får vi då följande viktiga formel:

$$\boxed{\sin^2 v + \cos^2 v = 1, (\text{den trigonometriska ettan})}$$

dvs. $\sin v = \pm\sqrt{1-\cos^2 v}$ och $\cos v = \pm\sqrt{1-\sin^2 v}$, där tecknet bestämmes av i vilken kvadrant vinkeln v ligger.

Anmärkning. Man kan också härav härleda övriga samband mellan de triogonometriska funktionerna för *samma vinkel*. (Jämför paragraf 2.2). Man får (Rita figur!):

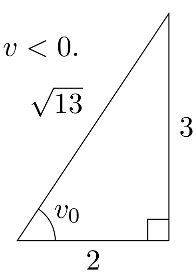
$\tan v = \pm \sin v/\sqrt{1-\sin^2 v}, \quad \tan v = \pm\sqrt{1-\cos^2 v}/\cos v$

$\sin v = \pm \tan v/\sqrt{1+\tan^2 v}$ och $\cos v = \pm 1/\sqrt{1+\tan^2 v}$

Exempel: Bestäm $\sin v$, om $\cos v = 1/4$ och $3\pi/2 < v < 2\pi$.

Lösning: I fjärde kvadranten är $\sin v$ negativt, varför
$\sin v = -\sqrt{1-\cos^2 v} = -\sqrt{1-(1/4)^2} = -\sqrt{15}/4$.

Exempel: Bestäm $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = -3/2$ och $-\pi/2 < v < 0$.



Lösning: Metod 1: Rita en hjälptriangel med $\tan v_0 = +3/2$ och $0 < v_0 < \pi/2$. Då är $\sin v_0 = 3/\sqrt{13}$ och $\cos v_0 = 2/\sqrt{13}$. Av formlerna ovan följer att $\sin v = \pm \sin v_0$ och $\cos v = \pm \cos v_0$. I fjärde kvadranaten är $\sin v < 0$ och $\cos v > 0$. Alltså är $\sin v = -3/\sqrt{13}$ och $\cos v = +2/\sqrt{13}$.

Metod 2: Använd formeln $\tan v = \sin v/\cos v$ samt ”trigonometriska ettan”:

$$\begin{cases} \tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = -\frac{3}{2} \\ \sin^2 v + \cos^2 v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin v = -\frac{3}{2}\cos v \\ \frac{9}{4}\cos^2 v + \cos^2 v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos v = \pm 2/\sqrt{13} \\ \sin v = \mp 3/\sqrt{13} \end{cases}$$

Eftersom $\cos v > 0$ och $\sin v < 0$ i fjärde kvadranten, får vi följande

Svar: $\sin v = -3/\sqrt{13}$ och $\cos v = 2/\sqrt{13}$.

Ö90. Visa att a) $\boxed{1/\cos^2 v = 1 + \tan^2 v}$ b) $\boxed{1/\sin^2 v = 1 + \cot^2 v}$

Ö91. Bestäm $\cos v$, om a) $\sin v = 1/3$, (v i första kvadranten)

b) $\sin v = -2/5$, (v i fjärde kvadranten) c) $\sin v = 2/3$

Ö92. Bestäm $\sin v$, om a) $\cos v = -0{,}6; \pi/2 < v < \pi$ b) $\cos v = 0{,}4$

Ö93. Bestäm $\tan v$ om a) $\sin v = 1/4$, (v i andra kvadranten)

b) $\cos v = 0{,}3$ (v i fjärde kvadranten) c) $\sin v = -0{,}5$ d) $\cos v = 2/9$

Ö94. Bestäm $\sin v$ och $\cos v$, om a) $\tan v = 2, \pi < v < 3\pi/2$

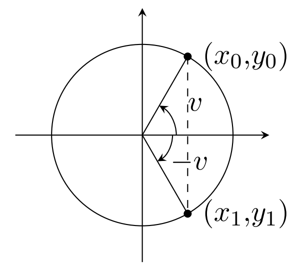
b) $\tan v = -1/3, \pi/2 < v < \pi$ c) $\tan v = -5$ d) $\cot v = -2$.

Några enkla formler, som sammanhänger med speglingar:

Antag att punkten (x_0, y_0) på enhetscirkeln svarar mot vinkeln v, dvs. att $x_0 = \cos v$ och $y_0 = \sin v$. [(x_0, y_0) är en godtycklig punkt på cirkeln. Vi ritar den för enkelhets skull i första kvadranten].

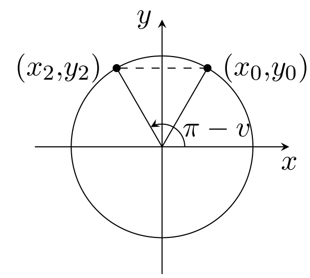
A) Speglar man (x_0, y_0) i x-axeln hamnar man i punkten $(x_1, y_1) = (x_0, -y_0)$ med vinkeln $(-v)$.

Alltså är $\underline{\cos(-v)} = x_1 = x_0 = \underline{\cos v}$ och $\underline{\sin(-v)} = y_1 = -y_0 = \underline{-\sin v}$, varav fås $\underline{\tan(-v)} = \frac{\sin(-v)}{\cos(-v)} = \frac{-\sin v}{\cos v} = \underline{-\tan v}$ och (analogt) $\underline{\cot(-v) = -\cot v}$.



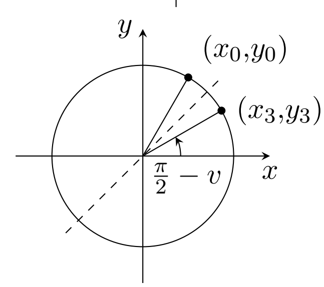
B) Spegelpunkten till (x_0, y_0) m.a.p. y-axeln är $(x_2, y_2) = (-x_0, y_0)$ med vinkeln $(\pi - v)$. Då är $\underline{\cos(\pi - v)} = x_2 = -x_0 = \underline{-\cos v}$ och $\underline{\sin(\pi - v)} = y_2 = y_0 = \underline{\sin v}$.

Anmärkning: Vinkeln $(\pi - v)$ kallas **supplementvinkeln** till v.

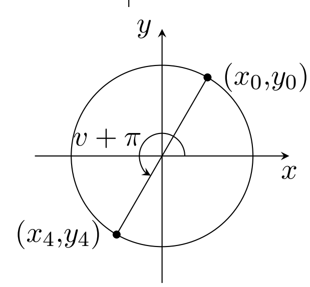


C) Spegelpunkten till (x_0, y_0) m.a.p. linjen $y = x$ är $(x_3, y_3) = (y_0, x_0)$ med vinkeln $\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$.

Då är $\underline{\cos(\frac{\pi}{2} - v)} = x_3 = y_0 = \underline{\sin v}$ och $\underline{\sin(\frac{\pi}{2} - v)} = y_3 = x_0 = \cos v$ varav fås $\underline{\tan(\frac{\pi}{2} - v)} = \sin(\frac{\pi}{2} - v)/\cos(\frac{\pi}{2} - v) = \cos v/\sin v = \underline{\cot v}$ och $\underline{\cot(\frac{\pi}{2} - v)} = \underline{\tan v}$. Vinkeln $(\pi/2 - v)$ kallas <u>komplementvinkeln</u> till v.



D) Spegling av (x_0, y_0) i origo ger $(x_4, y_4) = (-x_0, -y_0)$ med vinkeln $(v + \pi)$.



Man får $\underline{\cos(v + \pi)} = x_4 = -x_0 = \underline{-\cos v}$ och $\underline{\sin(v + \pi)} = y_4 = -y_0 = \underline{-\sin v}$, samt $\underline{\tan(v + \pi)} = \sin(v + \pi)/\cos(v + \pi) = (-\sin v)/(-\cos v) = \sin v/\cos v = \underline{\tan v}$ och $\underline{\cot(v + \pi)} = \underline{\cot v}$, dvs:

tangens och cotangens är <u>periodiska</u> funktioner med <u>perioden π</u>.

(Jämför med sinus och cosinus, som har perioden $= 2\pi$)

Vi sammanfattar formlerna, (som alltså gäller för godtyckliga vinklar):

$\sin(-v) = -\sin v$	$\tan(-v) = -\tan v$
$\cos(-v) = +\cos v$	$\cot(-v) = -\cot v$
$\sin(\pi - v) = +\sin v$	$\cos(\pi - v) = -\cos v$
$\sin(\pi/2 - v) = \cos v$	$\tan(\pi/2 - v) = \cot v$
$\cos(\pi/2 - v) = \sin v$	$\cot(\pi/2 - v) = \tan v$

$\sin(v + \pi) = -\sin v$	$\tan(v + \pi) = +\tan v$
$\cos(v + \pi) = -\cos v$	$\cot(v + \pi) = +\cot v$

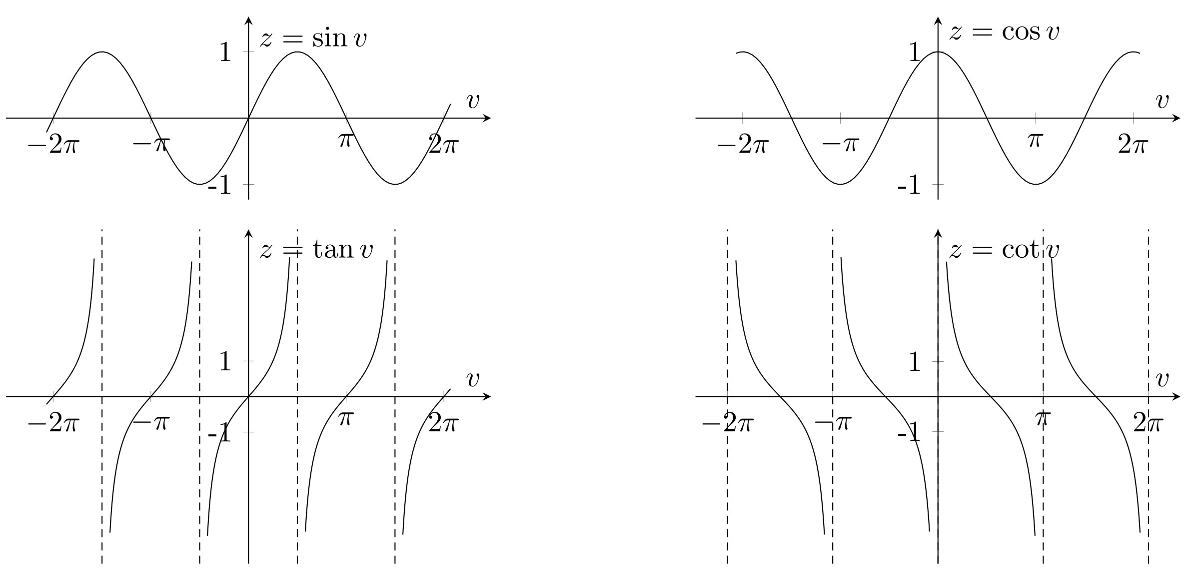
ObS: Dessa formler (liksom övriga inramade formler) bör man kunna utantill eller snabbt *kunna härleda*!

Exempel: Bestäm $\sin \dfrac{5\pi}{6}$.

Lösning: Vinkeln $5\pi/6 = 150^\circ = 180^\circ - 30^\circ = \pi - \pi/6$ ligger i andra kvadranten. (Rita figur!).

Formeln $\sin(\pi - v) = \sin v$ ger $\sin(5\pi/6) = \sin(\pi - \pi/6) = \sin \pi/6 = \sin 30^\circ = 1/2$.

Ö95. Bestäm $\underline{a}$) $\sin(-\dfrac{\pi}{6})$ $\underline{b}$) $\cos(-\dfrac{\pi}{6})$ $\underline{c}$) $\sin(-\dfrac{\pi}{3})$ $\underline{d}$) $\tan(-\dfrac{\pi}{4})$ $\underline{e}$) $\sin \dfrac{3\pi}{4}$
$\underline{f}$) $\cos \dfrac{2\pi}{3}$ $\underline{g}$) $\sin(\dfrac{7\pi}{6})$ $\underline{h}$) $\tan(\dfrac{7\pi}{6})$ $\underline{i}$) $\sin(\dfrac{7\pi}{4})$ $\underline{j}$) $\cot(\dfrac{11\pi}{6})$.



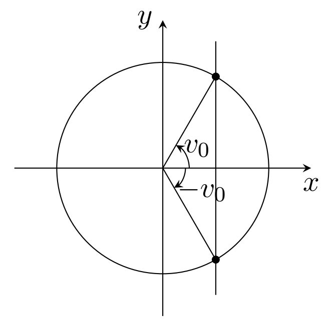
2.4 Ekvationerna $\cos v = a$, $\sin v = b$ och $\tan v = k$

Om (x,y) är en given punkt på enhetscirkeln $x^2+y^2 = 1$, så är (enligt definition) $\cos v = x$ och $\sin v = y$. Omvänt, om värdena för $\cos v$ och $\sin v$ <u>båda</u> är givna, så är punkten (x,y) entydigt bestämd och vinkeln v bestämd med undantag av en multipel av 2π, (dvs. med undantag av ett antal hela varv). Om däremot endast $\cos v = a$ är givet, så kan vinkeln v ligga i två olika kvadranter, en i övre och en i undre halvplanet, ty $\cos(-v_0) = \cos v_0$. Analogt: om endast $\sin v = b$ är givet, så kan v ligga antingen i högra eller vänstra halvplanet, ty $\sin(\pi - v_0) = \sin v_0$.

A) Ekvationen $\cos v = a$, där $-1 \leq a \leq 1$, har

allmänna lösningen $\quad v = \begin{cases} v_0 + n \cdot 2\pi \\ -v_0 + n \cdot 2\pi, \end{cases},$

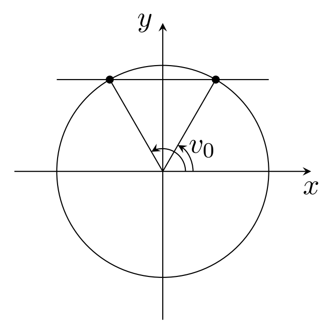
där n godtyckligt heltal ($n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$) och v_0 är <u>en</u> vinkel som satisfierar ekvationen $\cos v_0 = a$.
Lösningarna kan erhållas genom skärning av enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ med räta linjen $x = a$.
Ovanstående kan också formuleras (med $v_0 = u$):
$\boxed{\cos v = \cos u \Leftrightarrow v = \pm u + n \cdot 2\pi}$



B) Ekvationen $\sin v = b$, där $-1 \leq b \leq 1$, har

allmänna lösningen $\quad v = \begin{cases} v_0 + n \cdot 2\pi \\ \pi - v_0 + n \cdot 2\pi, \end{cases}$

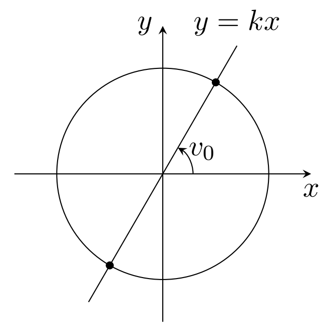
där n (godtyckligt) heltal och v_0 <u>en</u> vinkel, som satisfierar $\sin v_0 = b$.
Lösningarna kan fås genom skärning av enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ med räta linjen $y = b$.
Vi kan också formulera regeln:
$\boxed{\sin v = \sin u \Leftrightarrow v = u + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad v = \pi - u + n \cdot 2\pi}$



C) Vi har definierat $\tan v = y/x$ och visat att $\tan v$ är periodisk med *perioden* π. Alltså gäller att:

Ekvationen $\tan v = k$, där $-\infty < k < \infty$ har *allmänna lösningen* $\quad v = v_0 + n \cdot \pi$,

där n heltal och v_0 <u>en</u> vinkel, som satisfierar $\tan v_0 = k$.
Lösningarna kan fås genom skärning av enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ med räta linjer $y = kx$.
Alternativ formulering: $\boxed{\tan v = \tan u \Leftrightarrow v = u + n \cdot \pi}$



Exempel: Lös ekvationen $\sin(2v + 1) = 0{,}5$.

Lösning: Sätt $2v + 1 = t$ och lös först ekvationen: <u>$\sin t = 0{,}5$</u>. En lösning är $t_0 = \pi/6 = 30°$ varför allmänna lösningen blir

$$t = \begin{cases} t_0 + n \cdot 2\pi = \pi/6 + n \cdot 2\pi \\ \pi - t_0 + n \cdot 2\pi = 5\pi/6 + n \cdot 2\pi. \end{cases}$$

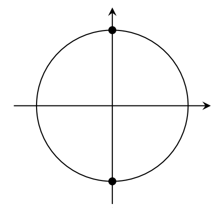
Vi får sedan:

$$v = (t-1)/2 = -1/2 + t/2 = \begin{cases} -1/2 + \pi/12 + n \cdot \pi \\ -1/2 + 5\pi/12 + n \cdot \pi. \end{cases}$$

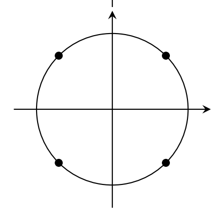
Exempel: Lös ekvationen $\cos 3v + \cos v = 0$.

Vi kan skriva ekvationen: $\cos 3v = \cos(v + \pi)$, ty $\cos(v + \pi) = -\cos v$. Men $\cos 3v = \cos(v + \pi) \Rightarrow 3v = \pm(v + \pi) + n \cdot 2\pi$.

Fall 1: $3v = +(v + \pi) + n \cdot 2\pi$ ger $2v = \pi + n \cdot 2\pi$, dvs. $\underline{v = \pi/2 + n \cdot \pi}$, där $n =$ (godtyckligt) heltal.



Fall 2: $3v = -(v + \pi) + n \cdot 2\pi$ ger $4v = -\pi + n \cdot 2\pi$, dvs. $v = -\pi/4 + n \cdot \pi/2 = +\pi/4 + m \cdot \pi/2$, där $m = (n - 1 =)$ godtyckligt heltal.



Svar: $v = \pi/2 + n \cdot \pi$ och $v = \pi/4 + n \cdot \pi/2$ där $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
Anmärkning: Vi kunde också (i exemplet ovan) använt formeln $\cos(\pi - v) = -\cos v$. (Genomför räkningen!)

Exempel: Lös ekvationen $\sin v + \sqrt{3} \cdot \cos v = 0$.

Lösning: Ekvationen kan skrivas $\underline{tanv = -\sqrt{3}}$, ty $\tan v = \sin v / \cos v$.

Denna ekvation har en lösning $v_0 = -\pi/3 = -60°$, ty $\tan(-\pi/3) = -\tan(\pi/3) = -\sqrt{3}$. Allmänna lösningen blir då $v = v_0 + n\pi = \underline{-\pi/3 + n \cdot \pi}$, där n godtyckligt heltal. [Alternativ formulering av svaret är: $v = 2\pi/3 + m \cdot \pi$, (där $m = n - 1$)].

Anmärkning: Med "att lösa en (trigonometrisk) ekvation" menas, att söka alla (reella) lösningar, dvs. att söka *allmänna lösningen* till ekvationen.

Ö96. Lös ekvationerna a) $\cos v = 1/2$ b) $\sin 2v = 1/2$ c) $\cos v = 0$

d) $\sin v = 2$ e) $\sin(3v - 1) = -1$ f) $\sin v = -1/\sqrt{2}$ g) $\cos 4v = -1/\sqrt{2}$.

Ö97. Lös ekvationerna a) $\cos(\pi/2 - v) = \cos 2v$ b) $\sin 3v = \sin v$

c) $\sin 3v + \sin v = 0$ d) $\cos 4v + \cos v = 0$ e) $\sin v + \cos 5v = 0$.

Ö98. Lös ekvationen a) $\tan v = 1/\sqrt{3}$ b) $\tan 2v = -1$ c) $\sin 3v = \cos 3v$

d) $\sin 4v + \cos 4v = 0$ e) $\cot v = 1/\sqrt{3}$ f) $\cot(4v + 1) = 0$.

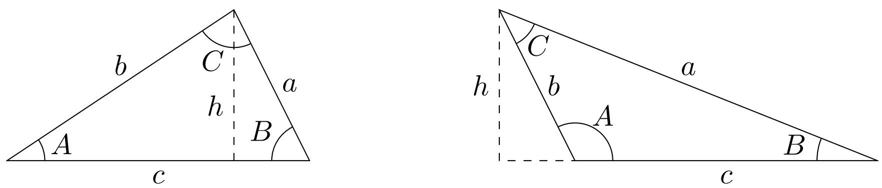
Ö99. Lös ekvationerna a) $\tan 2v = \tan(v/2)$ b) $\tan(2v + 3) + \tan v = 0$.

Ö100. Lös ekvationerna (Angiv närmevärden i grader med en decimal och/eller i radianer med två decimaler) a) $\cos v = 0{,}3$ b) $\sin 2v = -0{,}3$

c) $2 \cdot \tan v = 1$ d) $4 \cos v = 3 \sin v$ e) $3 \sin 3v + 2 \cos 3v = 0$.

2.5 Snedvinkliga trianglar. Sinus- och cosinusteoremen. Areasatsen.

En vinkel mellan $0°$ och $90°$ kallas *spetsig* medan en vinkel mellan $90°$ och $180°$ kallas *trubbig*. En (snedvinklig) triangel har antingen tre spetsiga vinklar eller en trubbig och två spetsiga.



Höjden $h = b \cdot \sin A = a \cdot \sin B$, dvs. $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b}$, vilket även gäller för den trubbiga triangeln, ty $\sin(180° - A) = \sin A$. Vi har därmed härlett:

$$\boxed{\textbf{Sinusteoremet}: \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}}$$

Anmärkning: Sinusteoremet gäller naturligtvis även för rätvinkliga trianglar. (Visa detta!)

Exempel: Solvera en triangel med $a = 7{,}0$, $b = 5{,}5$ och $B = 40°$.

Lösning: Sinusteoremet ger $\sin A = \dfrac{a}{b} \cdot \sin B = \dfrac{7{,}0}{5{,}5} \cdot \sin 40° \approx \dfrac{7{,}0}{5{,}5} \cdot 0{,}643 \approx 0{,}818$. Ekvationen $\sin A \approx 0{,}818$ har lösningar $A_1 \approx 54{,}9°$ (spetsig vinkel) och $A_2 = 180° - A_1 \approx 125{,}1°$ (trubbig vinkel). [ty $\sin A_2 = \sin(180° - A_1) = \sin A_1$].

Fall 1: $A_1 \approx 54{,}9°$ ger vinkeln $C_1 = 180° - B - A_1 \approx 85{,}1°$. Med sinusteoremet fås sidan $c_1 = b \cdot \dfrac{\sin C_1}{\sin B} \approx 5{,}5 \cdot \dfrac{\sin 85{,}1°}{\sin 40°} \approx 5{,}5 \cdot \dfrac{0{,}996}{0{,}643} \approx 8{,}5$.

Fall 2: $A_2 \approx 125{,}1°$ ger vinkeln $C_2 = 180° - B - A_2 \approx 14{,}9°$, och sidan $c_2 = b \cdot \sin C_2 / \sin B \approx 5{,}5 \cdot \sin 14{,}9° / \sin 40° \approx 5{,}5 \cdot 0{,}257/0{,}643 \approx 2{,}2$.

Svar: $A_1 \approx 54{,}9°$, $C_1 \approx 85{,}1°$, $c_1 \approx 8{,}5$ eller

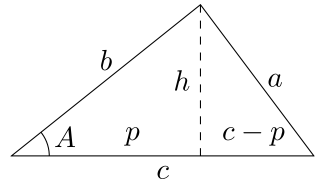
$A_2 \approx 125{,}1°$, $C_2 \approx 14{,}9°$, $c_2 \approx 2{,}2$.

Ö101. Solvera en triangel (med beteckningar enligt figur ovan), där a) $a = 7{,}2$, $b = 4{,}5$ och $A = 58{,}3°$ b) $b = 41{,}6$, $c = 63{,}5$ och $B = 28{,}5°$ c) $a = 15{,}6$, $c = 11{,}6$ och $C = 31{,}2°$ d) $a = 20{,}4$, $b = 5{,}1$ och $B = 40{,}1°$.

Vi skall nu härleda **cosinusteoremet** för en triangel (med betecknignar enligt figur):

Pythagoras' sats (på de två deltrianglarna) ger $b^2 = h^2 + p^2$ och $a^2 = h^2 + (c-p)^2$, där $p = b \cdot \cos A$. Härav fås $a^2 = h^2 + p^2 + c^2 - 2cp = b^2 + c^2 - 2cp$ som ger

$$\boxed{\textbf{Cosinusteoremet:} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$$



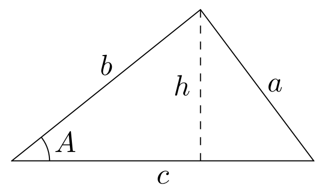
(och analogt): $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$ och $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

Anmärking: Om t.ex. $C = 90°$ fås $c^2 = a^2 + b^2$ dvs. Pythagoras' sats.

Ö102. Visa att cosinusteoremet gäller även **då vinkeln** A **är trubbig**.

Ledning: $\cos(180° - A) = -\cos A$.

Ö103. Solvera en triangel med



a) $a = 17{,}0$ och $b = 8{,}0$ samt $C = 39{,}5°$

b) $b = 3{,}9$ och $c = 8{,}1$ samt $A = 117{,}1°$

c) $a = 57{,}2$ och $c = 16{,}4$ samt $B = 22{,}7°$.

För en *triangels area* T gäller:

$$\boxed{\textbf{Areasatsen:} \quad T = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}}$$

dvs. arean är halva produkten av två sidors längder och sinus för mellanliggande vinkel. Vi har nämligen $T = c \cdot h/2$, där $h = b \cdot \sin A$, vilket ger $T = (cb \cdot \sin A)/2$, (och analogt för de övriga).

Ö104. Visa att formeln för T gäller även för en trubbig vinkel A.

Ö105. Beräkna arean av en triangel med a) $a = 5{,}0$ och $b = 7{,}0$ (l.enh.) samt $C = 60°$

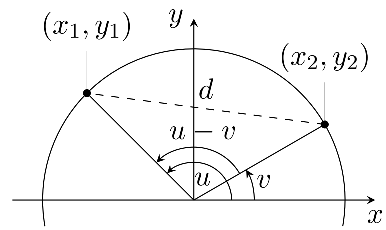
b) $a = 4{,}0$ och $c = 6{,}0$ samt $B = 40°$ c) $b = c = 3{,}0$ samt $A = 110°$.

2.6 Additions- och subtraktionsformler för de trigonometriska funktionerna

OBS: I allmänhet är $\sin(u+v)$ ej lika med $\sin u + \sin v$, (vanligt teknologfel att tro motsatsen!). [T.ex. $u = v = 30°$ ger $\sin(u+v) = \sin 60° = \sqrt{3}/2$ medan $\sin u + \sin v = 2 \cdot \sin 30° = 2 \cdot 0{,}5 = 1 \neq \sqrt{3}/2$]. Istället gäller följande formler (som man bör *kunna utantill*):

$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$	$\sin(u-v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v$
$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$	$\cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$
$\tan(u+v) = \dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \cdot \tan v}$	$\tan(u-v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v}$

A) Vi visar först *formeln för* $\cos(u-v)$*:*



Antag $\begin{cases} x_1 = \cos u \\ y_1 = \sin u \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \cos v \\ y_2 = \sin v, \end{cases}$

där $x_1^2 + y_1^2 = 1$ och $x_2^2 + y_2^2 = 1$.

Cosinusteoremet ger $\underline{d^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(u-v)}$. Med avståndsformeln fås också $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2)$, dvs. $\underline{d^2 = 1 + 1 - 2(\cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v)}$. En jämförelse av de två uttrycken för d^2 ger direkt formlen för $\cos(u-v)$.

Anmärkning: En något listigare metod är att *vrida* triangeln (ovan), så att ena hörnet hamnar i punkten (1,0) och använda avståndsformeln (även på den nya triangeln) istället för cosinusteoremet. Formeln för $\cos(u-v)$ kan också härledas med hjälp av *skalärprodukt* (av vektorer).

Vi använder nu formlen för $\cos(u-v)$ för att bevisa de övriga formlerna:

B) $\cos(u+v) = \cos[u - (-v)] = \cos u \cdot \cos(-v) + \sin u \cdot \sin(-v) =$
$= \cos u \cdot \cos u - \sin u \cdot \sin v$, ty $\cos(-v) = \cos v$ och $\sin(-v) = -\sin v$.

C) $\sin(u+v) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (u+v)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right] =$
$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cdot \cos v + \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cdot \sin v = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v.$

D) $\sin(u-v) = \sin[u + (-v)] = \sin u \cdot \cos(-v) + \cos u \cdot \sin(-v) =$
$= \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot (-\sin v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v.$

E) $\tan(u+v) = \dfrac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)} = \dfrac{\sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v}{\cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v} =$
$=$ [dividera täljare och nämnare med $\cos u \cdot \cos v$] $=$
$= \dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \cdot \tan v}$, ty $\tan u = \sin u / \cos u$.

F) $\tan(u-v) = \tan[u + (-v)] = \dfrac{\tan u + \tan(-v)}{1 - \tan u \cdot \tan(-v)} = \dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v}$, ty $\tan(-v) = -\tan v$.

Exempel: Beräkna $\sin 75°$ exakt.

Lösning: $\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{6}$
$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = (\sqrt{3}+1)\sqrt{2}/4 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4.$

Ö106. Beräkna exakt a) $\cos 75°$ b) $\tan(5\pi/12)$ c) $\sin 15°$ d) $\cos(\pi/12)$

e) $\sin 105°$ f) $\cos(7\pi/12)$.

Ö107. Bestäm $\tan(u+v)$, om a) $\tan u = 1/2$ och $\tan v = 1/3$ b) $\tan u = 4$ och $\tan v = -2/3$.

Ö108. Bestäm $\cos(u+v)$, om a) $\cos u = 1/3$, $\cos v = 1/4$ (u och v i första kvadranten)

b) $\cos u = 0{,}8$, $\cos v = 0{,}6$ (u i fjärde och v i första kvadranten)

c) $\cos u = 1/5$ och $\cos v = 2/5$.

2.7 Ytterligare trigometriska formler

A) **Produktformler**

1)

$$\text{Ledvis addition:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v \\ \underline{\sin(u-v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v} \end{array} \right.$$

$$\text{ger} \quad \sin(u+v) + \sin(u-v) = 2 \cdot \sin u \cdot \cos v$$

2) Ledvis addition respektive subtraktion:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v \\ \underline{\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v} \end{array} \right.$$

$$\text{ger} \quad \cos(u-v) + \cos(u+v) = 2 \cdot \cos u \cdot \cos v,$$

$$\text{respektive} \quad \cos(u-v) - \cos(u+v) = 2 \cdot \sin u \cdot \sin v.$$

Vi har därmed härlett de viktiga formlerna för övergång från en *produkt* (av sinus och/eller cosinus) till en *summa* eller *skillnad:*

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \sin u \cdot \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u+v) + \sin(u-v)] \\ 2)\ \cos u \cdot \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)] \\ 3)\ \sin u \cdot \sin v = -\frac{1}{2}[\cos(u+v) - \cos(u-v)] \end{array}}$$

Anmärkning: Om man inte vill lära sig dessa formler utantill, bör man snabbt (som ovan) *kunna härleda* dem utgående från additions- och subtraktionsformlerna!

Ö109. Beräkna a) $\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$ b) $\cos \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$ c) $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$
d) $\tan 75^\circ \cdot \tan 15^\circ$.

B) **Formler för dubbla vinkeln**

$\sin 2u = 2 \cdot \sin u \cdot \cos u$ $\tan 2u = \frac{2\tan u}{1-\tan^2 u}$	$\left\{ \begin{array}{l} \cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u \\ \cos 2u = 2\cos^2 u - 1 \\ \cos 2u = 1 - 2\sin^2 u \end{array} \right.$

ty $\underline{\sin 2u} = \sin(u+u) =$ [enligt formeln för $\sin(u+v)$ med $v = u$] $= \sin u \cdot \cos u + \sin u \cdot \cos u = 2 \cdot \sin u \cdot \cos u$,

$\underline{\cos 2u} = \cos(u+u) = \cos u \cdot \cos u - \sin u \cdot \sin u = \cos^2 u - \sin^2 u$, som med trigonometriska ettan kan skrivas $\cos 2u = \cos^2 u - (1 - \cos^2 u) = 2\cos^2 u - 1$ eller $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 1 - \sin^2 u - \sin^2 u = 1 - 2\sin^2 u$,

$\underline{\tan 2u} = \tan(u+u) = \dfrac{\tan u + \tan u}{1 - \tan u \cdot \tan u} = \dfrac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$.

Ö110. Härled liknande formler för $\sin 3u$, $\cos 3u$ och $\tan 3u$.
[*Ledning:* Skriv $3u = u + 2u$].

C) **Formler för halva vinkeln**

Om man i formlerna $\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u$ och $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$ sätter $2u = v$, dvs. $u = v/2$ får man

$$\boxed{\sin^2 \frac{v}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos v) \quad \text{och} \quad \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos v)}$$

varav följer: $\tan^2 \dfrac{v}{2} = (1 - \cos v)/(1 + \cos v)$.

Exempel: Beräkna $\sin 15^\circ = \sin(\pi/12)$

Lösning: $\sin v$ är positivt i första kvadranten, varför $\sin 15^\circ = \sin \dfrac{30^\circ}{2} =$

$$+\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 30^\circ)} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Tillägg (till exemplet ovan): Vi kan skriva $\dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \cdot$

$$\cdot \sqrt{3 + 1 - 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1)$$

varför $\sin 15^\circ = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1)$, vilket stämmer överens med tidigare resultat. (Övningsexempel Ö106c).

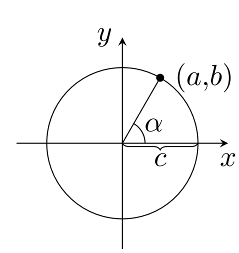
Ö111. Beräkna <u>a</u>) $\sin(\pi/8)$ <u>b</u>) $\cos 22{,}5^\circ$ <u>c</u>) $\tan(\pi/8)$.

D) **Formel för $a \cdot \sin v + b \cdot \cos v$**

Om a och b är *givna tal*, så *finns* (enligt additionsformeln för sinus) *konstanter* c och α, där $c \geq 0$, så att *för alla* v*:*

$\boxed{a \cdot \sin v + b \cdot \cos v = c \cdot \sin(v + \alpha)}$ om och endast om $\underline{a = c \cdot \cos \alpha, b = c \cdot \sin \alpha}$.

Vi har nämligen att HL $= c\sin(v + \alpha) = c(\sin v \cos \alpha + \cos v \sin \alpha) = c\cos \alpha \cdot \sin v + c\sin \alpha \cdot \cos v = a\sin v + b\cos v = VL$, om och endast om $\underline{a = c \cdot \cos \alpha}$ och $\underline{b = c \cdot \sin \alpha}$.
Talparet (a,b) svarar alltså mot en punkt (a,b) på en cirkel kring origo med radien $\underline{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$. Vinkeln α satisfierar ekvationen $\underline{\tan \alpha = b/a}$ med $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ om $a > 0$, (och $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$ om $a < 0$).



Exempel: Lös ekvationen $3\sin v - 4\cos v = 2$.

Lösning: $3\sin v - 4\cos v = c\cdot\sin(v+\alpha) = c(\sin v\cos\alpha + \cos v\sin\alpha) = c\cos\alpha\cdot\sin v + c\sin\alpha\cdot\cos v \Leftrightarrow 3 = c\cos\alpha$ och $-4 = c\sin\alpha \Leftrightarrow c = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$ och $\tan\alpha = -4/3$, $-\pi/2 < \alpha < 0$.

Vi har alltså ekvationen $\underline{5\sin(v+\alpha) = 2}$, dvs. $\sin(v+\alpha) = 0{,}4$ med $\underline{\alpha \approx -53{,}1^\circ}$. Sätt $\underline{v+\alpha = t}$.

En lösning till ekvationen $\underline{\sin t = 0{,}4}$ är $t_0 \approx 23{,}6^\circ$, varför allmänna lösningen är $t \approx 23{,}6^\circ + n\cdot 360^\circ$, $t \approx 180^\circ - 23{,}6^\circ + n\cdot 360^\circ = 156{,}4^\circ + n\cdot 360^\circ$. Men $\underline{v = t-\alpha}$, där $\alpha \approx -53{,}1^\circ$, vilket ger:

Svar: $v \approx 76{,}7^\circ + n\cdot 360^\circ \approx 1{,}34 + n\cdot 2\pi$, $\quad v \approx 209{,}5^\circ +$
$+\, n\cdot 360^\circ \approx 3{,}66 + n\cdot 2\pi$ (radianer).

Ö112. Lös ekvationerna. (Angiv antingen exakta värden eller närmevärden i grader med en korrekt decimal och/eller i radianer med två korrekta decimaler):

a) $\sin v + \cos v = 1$ b) $\sin v - \sqrt{3}\cdot\cos v = 1$ c) $4\sin v + 3\cos v = 5$

d) $2\sqrt{2}\cos v + 2\sin v = 3$ e) $2\sin v - \cos v = 2$

f) $3\sin v + 2\cos v + 4 = 0$ g) $8\cos v - 6\sin v = 5$.

2.8 Några trigonometriska ekvationer

Exempel: Lös ekvationen $2\cdot\cos^2 v - \cos v = 3$.

Lösning: sätt $\underline{\cos v = z}$. Då fås andragradsekvationen $2z^2 - z = 3$, dvs. $z^2 - \dfrac{1}{2}\cdot z - \dfrac{3}{2} = 0$ med rötter

$$z_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \pm \frac{5}{4},$$ dvs. $z_1 = 3/2$ och $z_2 = -1$.

$z_1 = 3/2$ ger $\cos v = z_1 = 1{,}5$, vilket är *orimligt*, ty $-1 \le \cos v \le 1$ för alla rella v.

$z_2 = -1$ ger ekvationen $\cos v = -1$ med allmän lösning $v = \pm\pi + n\cdot 2\pi$ (alltså sammanfallande rötter).

Svar: $v = \pi + n\cdot 2\pi = 180^\circ + n\cdot 360^\circ$.

Exempel: Lös ekvationen $\sin^5 v + \sin^3 v = 2$.

Lösning: Eftersom $\sin v \le 1$ för alla v, så är vänster led VL $\le 1^5 + 1^3 = 2$ med likhet endast för $\sin v = 1$. Men höger led HL $= 2$. Alltså måste gälla att $\sin v = 1$, dvs. $\underline{v = \pi/2 + n\cdot 2\pi}$.

Ö113. Lös ekvationerna a) $2\cdot\sin^2 v = 1$ b) $5\sin v - 6\sin^2 v = 1$,

$\underline{c}$) $8\sin^2 v - 2\cos v = 5$, $\underline{d}$) $\cos 2v = \cos^2 v$ $\underline{e}$) $\tan 2v = 3\tan v$,

$\underline{f}$) $\cos v - 2\sin v = \sin v \cdot \tan v$, $\underline{g}$) $4\sin^2 v + 8\sin^2 2v = 7$.

Ö114. Lös ekvationerna $\underline{a}$) $2\cos^3 v - 3\cos^2 v - 3\cos v + 2 = 0$

$\underline{b}$) $2\sin^3 v + \sin^2 v - 2\sin v = 1$, $\underline{c}$) $4\cos^3 v - 8\sin^2 v - \cos v + 6 = 0$.

Ö115. Lös ekvationerna $\underline{a}$) $\cos v + \cos^4 v = 2$ $\underline{b}$) $\sin v + \sin^3 v = 3$,

$\underline{c}$) $3\sin^6 v + \sin v = 4$ $\underline{d}$) $3\sin^6 v - \sin v = 4$.

<u>Ö116-119</u>: (Reserv)

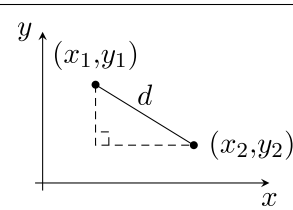
Kapitel 3

Analytisk geometri

3.1 Avståndet mellan två punkter

Avståndet mellan två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) i ett vanligt (ortonormerat) koordinatplan kan beräknas med avståndsformeln:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Denna formel följer av Pythagoras' sats.

Ö120. Bestäm avståndet mellan a) $(-6, 0)$ och origo b) origo och (2,3) c) (2,2) och (−3,2) d) (2, − 2) och (−4,6) e) (−2,5) och (−4,8). (Rita figur!)

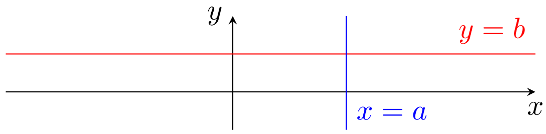
Ö121. Bestäm en punkt på y-axeln, som ligger lika långt från punkterna a) (−3,2) och (4,1) b) (−2,1) och (4,5) (Rita figur!)

Ö122. Två av en liksidig triangels hörn ligger i a) (−1, − 1) och (3,1) b) (2,3) och (−1,0). Bestäm det tredje hörnets läge.

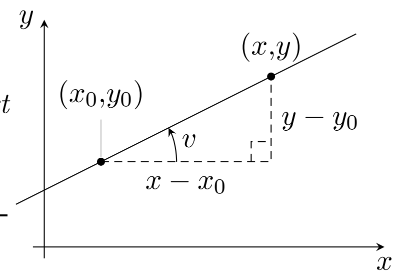
3.2 Räta linjen

A) Ekvationen för en rät linje parallell med y-axeln är $\boxed{x = a}$, där a är en konstant. Speciellt är $x = 0$ ekvationen för y-axeln.

B) Ekvationen för en rät linje parellell med x-axeln är: $\boxed{y = b}$, där b är en konstant. Ekvationen för x-axeln är $y = 0$.



C) Betrakta en rät line, som går genom en *given punkt* (x_0, y_0) och som ej är parallell med y-axeln.
För punkter (x,y) på linjen gäller att kvoten $(y - y_0)/(x - x_0)$ är konstant längs linjen och att konstanten är $k = \tan v$. (Se figur).

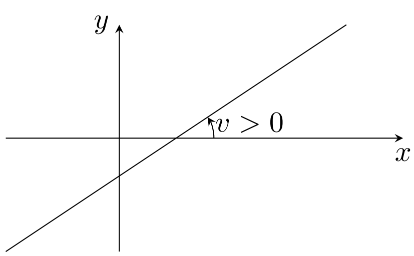


[För två olika punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) fås likformiga trianglar]. För punkterna på linjen gäller alltså att skillnaden $(y - y_0)$ är proportionell mot $(x - x_0)$ med proportionalitetskonstanten $k = \tan v$.

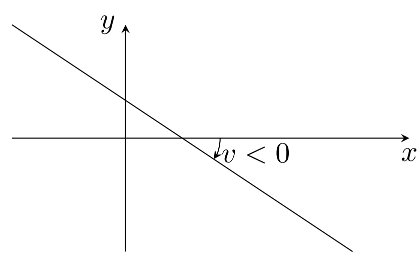
Vi får alltså den s.k. enpunktsformeln för den räta linjen:

$$\boxed{y - y_0 = k \cdot (x - x_0) \qquad \text{där} \qquad k = \tan v.}$$

Konstanten k kallas riktningskoefficient (eller vinkelkoefficient) och vinkeln v kallas riktningsvinkel.



Positiv lutning: $k > 0$
$0 < v < \dfrac{\pi}{2}$



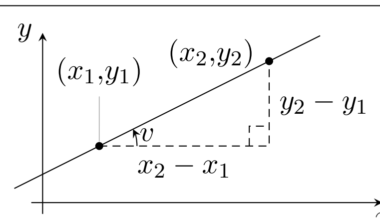
Negativ lutning: $k < 0$,
$-\dfrac{\pi}{2} < v < 0$ (eller $\dfrac{\pi}{2} < v < \pi$)

En rät linje är alltså *entydigt bestämd* av en punkt (x_0, y_0) och en riktningskoefficient k. Räta linjens ekvation kan skrivas $y = kx + y_0 - kx_0$, dvs. $\boxed{y = kx + m}$. Konstanten $m(= y_0 - kx_o)$ är den s.k. "ordinatan i origo", dvs. y-koordinaten för räta linjens skärning med y-axeln, dvs. med $x = 0$.

Speciellt betyder $\boxed{y = kx}$ en *rät linje genom origo.*

Om en rät linje går genom *två givna punkter* (x_1, y_1) och (x_2, y_2), där $x_1 \neq x_2$, så kan riktningskoefficienten beräknas:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (= \tan v)$$



Härav fås den s.k. *tvåpunktsformeln* för räta linjen:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

D) *Sammanfattningsvis* är $\boxed{Ax + By + C = 0}$ allmänna formen för räta linjens ekvation. [Om $A = 0$, men $B \neq 0$ så fås en linje, $y = -C/B$, parallell med x-axeln, om $B = 0$, $A \neq 0$ en linje, $x = -C/A$ parallell med y-axeln och om $A \neq 0$, $B \neq 0$ en rät linje som skär båda axlarna].

Två linjer $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ och $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ är parallella om och endast om riktningsvinklarna v_1 och v_2 är lika, dvs. om riktningskoefficienterna $k_1 = -A_1/B_1$ och $k_2 = -A_2/B_2$ är lika eller om $B_1 = B_2 = 0$.

Exempel: Bestäm en ekvation för räta linje genom punktrna (2,4) och (−1,3).

Lösning: Riktningskoefficienten $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3-4}{-1-2} = \dfrac{-1}{-3} = \dfrac{1}{3}$. Med enpunktsformeln fås linjens ekvation: $y - 4 = \dfrac{1}{3}(x-2)$, dvs. $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{10}{3}$ eller $x - 3y + 10 = 0$. [Alternativt: $y - 3 = \dfrac{1}{3}(x+1)$, som naturligtvis ger samma ekvation].

Svar: $x - 3y + 10 = 0$.

OBS: Kontrollera alltid räkningarna genom att visa att de givna punkterna satisfierar den erhållna ekvationen!

Exempel: Sök skärningspunkten mellan linjerna $3x + 4y - 6 = 0$ och $2x + y - 5 = 0$.

Lösning: Vi har ekvationssystemet $\begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 2x + y \ = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 8x + 4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 5x \qquad = 14, \end{cases}$, som ger

$x = 14/5 = 2{,}8$ och $y = (6 - 3x)/4 = -0{,}6$.

[*Eller:* Andra ekvationen ger $y = 5 - 2x$, som insatt i den första ekvationen ger $3x + 4(5 - 2x) = 6$ o.s.v.].

Svar: Skärningspunkten är (2,8; −0,6). (Rita figur!)

Ö123. Bestäm en ekvation för räta linjen genom

a) origo med riktningskoefficienten 2/3

b) (2,1) med riktningskoefficienten = −2/3 c) (−2,3) parallell med x-axeln

d) (−2,3) parallell med y-axeln. (Rita figur!)

Ö124. Bestäm en ekvation för räta linjen genom punkten (2,1) med riktningsvinkeln

a) $45°$ b) $60°$ c) $90°$ d) $135°$ (dvs. $-45°$)

e) $150°$ (dvs. $-30°$) (Rita figur!)

Ö125. Bestäm en ekvation för räta linjen genom punkterna (rita figur!): a) (1,1) och (2,3) b) $(-2{,}3)$ och origo c) $(-1{,}0)$ och origo

d) $(-2{,}1)$ och $(2/3{,}1/3)$ e) $(4/3, -1/5)$ och $(3/7, 2/9)$

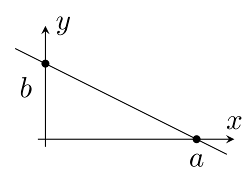
f) $(-2/7, -3/23)$ och $(-2/7, 8/69)$.

Ö126. Sök skärningspunkterna mellan linjerna (rita figur!)

a) $2x + 3y - 6 = 0$ och $x + y - 1 = 0$ b) $2x + 3y = 0$ och $x - 2y + 2 = 0$

c) $2x - 3y - 6 = 0$ och $4x - 6y = 36$ d) $3x + 2y - 4 = 0$ och $6x + 4y = 8$

Ö127. Visa att ekvationen för räta linjen genom punkterna $(a{,}0)$ och $(0{,}b)$ är $\boxed{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1}$, om a och $b \neq 0$.



Ö128. Bestäm en ekvation för linjen genom punkterna a) (2,0) och $(0, -4)$ b) (0,3) och (1,0) c) (0,1) och (0,0). (rita figurer!)

Om två räta linjer (med riktningskoefficienterna k_1 och $k_2 \neq 0$) *skär varandra vinkelrätt* så gäller att:

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

dvs. $k_1 = -1/k_2$ och $k_2 = -1/k_1$, då k_1 och $k_2 \neq 0$. Om riktningsvinklarna är v respektive $v + 90°$, så fås nämligen att $k_2 = \tan(v + 90°) = -\tan[180° - (v + 90°)] = -\tan(90° - v) = -\cot v = -1/\tan v = -1/k_1$.

En rät linje, som skär en annan given rät linje vinkelrätt, kallas **normal** till den givna linjen. *Normalens riktningskoefficient* är alltså $-1/k$, om den givna linjens riktningskoefficient är k.

OBS: Räta linje $ax + by = c_1$ har normalen $bx - ay = c_2$.

Exempel: Bestäm en ekvation för linjen, som går genom $(2, -1)$ och är normal till $3x+2y+2 = 0$ [OBS: Punkten $(2, -1)$ ligger utanför den givna linjen].

Lösning: Den givna linjen, vars ekvation kan skrivas $y = -3x/2-1$, har riktningskoefficienten $k_1 = -3/2$. Normalen riktningskoefficient är därför $k_2 = -1/k_1 = 2/3$ och normalens ekvation: $y + 1 = \dfrac{2}{3}(x - 2)$, dvs. $\underline{2x - 3y - 7 = 0}$.

Ö129. Bestäm en ekvation för normalen till linjen <u>a</u>) $2x+5y=0$ i origo <u>b</u>) $3y-x=4$

i punkten $(-1,1)$ <u>c</u>) $5x+9y=0$ från punkten $(2,3)$ <u>d</u>) $x=4y+1$ från origo.
(Rita figurer!)

Ekvationen (av andra graden): $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0$ betyder geometriskt <u>två räta linjer</u>:

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{och} \quad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Exempel: Ekvationen $x^2=4y^2$ kan skrivas $4y^2-x^2=(2y-x)(2y+x)=0$ och betyder alltså två (skärande) räta linjer $y=x/2$ och $y=-x/2$. [Eller (enklare uttryckt): $x^2=4y^2 \Leftrightarrow x=\pm 2y$].

Exempel: Bestäm den geometriska betydelsen av $y^2-xy-6x^2-3x+y=0$.

Lösning: Andra grads ekvationen (för y) kan skrivas $y^2-(x-1)y-(6x^2+3x)=0$ och har lösningen

$$y=\frac{x-1}{2}\pm\sqrt{\frac{(x-1)^2}{4}+6x^2+3x}=\frac{x-1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{25x^2+10x+1}=$$
$$=[\text{jämn kvadrat under rottecknet!}]=\frac{x-1}{2}\pm\frac{1}{2}(5x+1).$$

Alltså är $y=\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{5x+1}{2}=3x$ eller $y=\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{5x+1}{2}=-2x-1$ vilket betyder *två räta linjer.*

Ö130. Bestäm den geometriska betydelsen av <u>a</u>) $xy=0$ <u>b</u>) $x^2+4xy+3x=0$

<u>c</u>) $x^2-y^2=0$ <u>d</u>) $x^2-y^2+x+y=0$ <u>e</u>) $xy-x+2y-2=0$.

Ö131. Bestäm den geometriska betydelsen av <u>a</u>) $y^2+xy-6x^2=0$

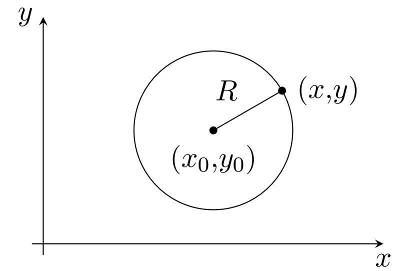
<u>b</u>) $2y^2+3xy+x^2=2y+x$ <u>c</u>) $y^2-xy-2y-2x^2+x+1=0$

<u>d</u>) $2x^2-3y^2+xy=3x+7y+2$.

3.3 Cirkeln

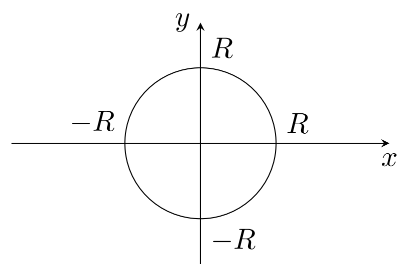
En cirkel består av punkter, som ligger på samma avstånd (radien) från en given punkt (medelpunkten).

Ekvationen för en cirkel med *radien R och medelpunkten* (x_0, y_0) är $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.



vilket följer av avståndsformeln.

Speciellt: $x^2+y^2=R^2$ är ekvationen för en cirkel med *radien* R och *medelpunkten* i *origo*.



Exempel: Angiv den geometriska betydelsen av ekvationen

$x^2+2x+y^2-3y=3$

Lösning: Ekvationen kan (genom kvadratkomplettering) skrivas

$x^2+2x+1+y^2-2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot y+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=3+1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$, dvs. $(x+1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$, vilket betyder en cirkel med medelpunkt $(-1,\frac{3}{2})$ och radie $\dfrac{5}{2}$. (Rita figur!)

Ö132. Giv en ekvation för cirkeln med följande medelpunkt och radie:

a) origo; $R=9$ b) $(2,-3); R=7$ d) $(-6{,}0); R=2{,}5$ (Rita figur!)

Ö133. Giv en ekvation för en cirkel, som har medelpunkten $(-1,3)$ och går genom

a) origo b) (1,1) c) (7,0) (rita figur!)

Ö134. Angiv den geometriska betydelsen av ekvationen a) $x^2+y^2-3=0$

b) $x^2+y^2-4y=5$ c) $2x^2+2y^2-4x+3y=0$ d) $x^2+y^2+4x-y+4=0$

e) $36x^2+36y^2-36x+48y=39$.

Ö135. Sök skärningspunkterna mellan cirkeln $x^2+4x+y^2-2y=8$ och räta linjen

a) $5x-y-2=0$ b) $2x-3y-6=0$ c) $4x-y-6=0$ (Rita figur!)

Vi vet att en cirkels ekvation är bestämd, om vi känner de tre storheterna x_0, y_0 och R. Detta betyder att tre av varandra oberoende villkor helt bestämmer en cirkel. T.ex. genom tre givna punkter, som ej ligger i rät linje, går en och endast en cirkel.

Ö136. Giv en ekvation för en cirkel, som går genom a) $(1,-3),(-3,1)$ och $(-5,-1)$,

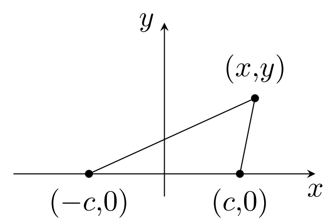
b) $(6,7),(-3,4)$ och $(-18,-1)$ c) $(1,6)$ och $(-3,-2)$ och har medelpunkt på y-axeln.

3.4 Ellipsen

En ellips är en kurva som består av alla punkter, vilkas avstånd till två givna, fixa punkter (brännpunkterna) har en given konstant *summa*.

Om brännpunkterna är givna, kan man alltid införa ett xy-koordinatsystem, så att de givna punkterna ligger på x-axeln, symmetriskt kring origo. Antag alltså att brännpunkterna är $(c,0)$ och $(-c,0)$. (Se figur.)

Antag vidare att den givna avståndssumman är $2a$. Då gäller alltså för en punkt (x,y) på ellipsen, att $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$.
Denna ekvation kan omformas (genom överflyttning och kvadrering):

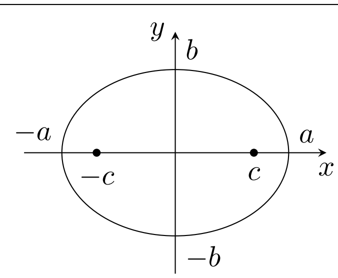


$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Rightarrow (x-c)^2+y^2=$
$=(2a)^2+(x+c)^2+y^2-2\cdot 2a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, dvs. $x^2-2cx+c^2+y^2=$
$=4a^2+x^2+2cx+c^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, som ger $a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}=$
$=a^2+xc$. Ytterligare kvadrering ger $a^2\cdot(x^2+2xc+c^2+y^2)=a^4+2a^2xc+x^2c^2$, varav fås $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=(a^2-c^2)a^2$.

Här är $a>c$, ty summan (2a) av två sidor i en triangel är större än den tredje sidan (2c). Sätt $a^2-c^2=b^2$, (vilket är möjligt, ty $a^2-c^2>0$). Vi får då ekvationen $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Alltså:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

är ekvationen för en **ellips** med *medelpunkten i origo* och med *axlarna utmed koordinataxlarna.*



Ellipsen är symmetrisk kring båda koordinat-axlarna. Den skär x-axeln, dvs. $y=0$, i punkterna $x=\pm a$ och y-axeln, dvs. $x=0$, i punkterna $y=\pm b$. (Se figur).

Anmärkning: a och b kallas ellipsens *halvaxlar*. Enkel koordinattransformation ger att

$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ är ekvationen för en ellips med medlelpunkt i (x_0, y_0) och med axlarna parallella med koordinataxlarna.

Om $a = b = R$ fås cirkelns ekvation: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$. Cirkeln är alltså ett specialfall av ellipsen.

Exempel: Angiv den geometriska betydelsen av ekvaiotnen

$4x^2 + 3x + 3y^2 = 0$.

Lösning: Ekvationen kan (genom kvadratkomplettering) skrivas:

$4(x^2+2\cdot\dfrac{3}{8}\cdot x+\dfrac{9}{64})+3y^2 = 4\cdot\dfrac{9}{64}$, dvs. $4(x+\dfrac{3}{8})^2+3y^2 = \dfrac{9}{16}$ eller slutligen $(x+\dfrac{3}{8})^2/\dfrac{9}{64}+y^2/\dfrac{3}{16} = 1$. Jämför med ellipsens ekvation: $(x-x_0)^2/a^2 + (y-y_0)^2/b^2 = 1$. Vi har alltså en *ellips* med *medelpunkten* $(-\frac{3}{8}, 0)$ och med *halvaxlarna* $a = \sqrt{\dfrac{9}{64}} = \dfrac{3}{8}$ och $b = \sqrt{\dfrac{3}{16}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Ö137. Angiv medelpunkt och halvaxlar för följande ellipser:

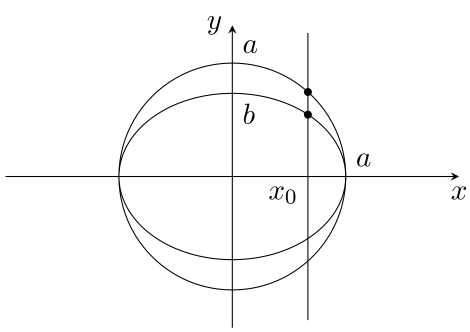
a) $4x^2 + y^2 = 16$ b) $3x^2 + 8y^2 = 6$ c) $x^2 - 2x + 4y^2 + 8y + 1 = 0$

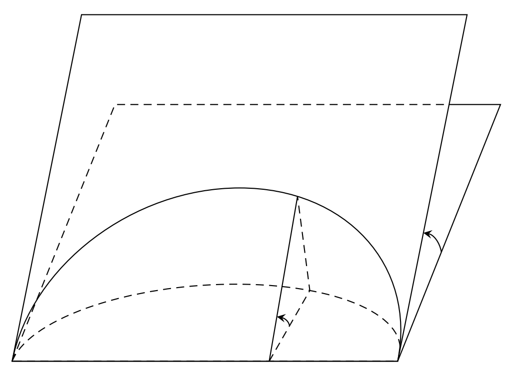
d) $3x^2 + 4y^2 = 12x$ e) $2x^2 + 2y^2 + 1 = 6x - 2y$ f) $x^2 + x + 7y^2 + y = 1$

(Rita figur!)

Ellips som projektion av cirkel

Om $b < a$, så kan man kring ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ i xy-planet *omskriva* en cirkel $x^2 + y^2 = a^2$, (se vänstra figuren nedan).





Ekvationerna för ellipsen och den omskrivna cirkeln kan skrivas $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ respektive $y = \pm\sqrt{a^2-x^2}$. Det betyder att för varje givet x-värde, $x = x_0$, (med $-a < x_0 < a$), är kvoten mellan ellipsens (positiva) y-koordinat och omskrivna cirkelns (positiva) $y$koordinat lika med b/a, dvs. oberoende av x_0. Då $b < a$ kan man sätta $b/a = \cos v$ för någon vinkel v mellan $0°$ och $90°$. Kvoten mellan ellipsen och omskrivna cirkelns y-koordinater är alltså lika med $\cos v$, vilket betyder att (se högra figuren ovan):

Varje ellips $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ med $b < a$ kan uppfattas som projektionen av en cirkel på ett plan, som skär cirkelplanet längs en diameter under en vinkel v, som bestämmes av att $\cos v = b/a$.

[För $b = a$ blir $v = 0$ och ellipsen blir en cirkel].

Anmärkning: Om $b > a$ fås analogt en projektion, där $\cos v = a/b$. Genom att uppfatta ellipsen som projektionen av en cirkel får man också att

$$\boxed{\text{ellipsens area } = \pi \cdot a\, b}$$

Den omskrivna cirkelns area är ju $\pi \cdot a^2$, varför den projicerade arean blir $\pi a^2 \cdot \cos v = \pi a^2 \cdot b/a = \pi ab$.

Ö138. Under vilken vinkel skall en cirkel projiceras för att följande ellipser skall erhållas:

a) $x^2 + 4y^2 = 8$ b) $3x^2 + 4y^2 = 6$ c) $4x^2 + 8y^2 = 7$ d) $8x^2 + 4y^2 = 7$?

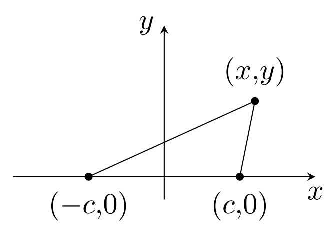
Ö139. Beräkna arean för respektive ellips i Ö138.

3.5 Hyperbeln

En hyperbel är en kurva, som består av alla punkter, vilkas avstånd till två givna punkter (brännpunkterna) har en given konstant *skillnad.*

[En hyperbel har *två grenar:* en gren, där avståndet till den ena brännpunkten är det större avståndet och en gren, där avståndet till den andra brännpunkten är störst].

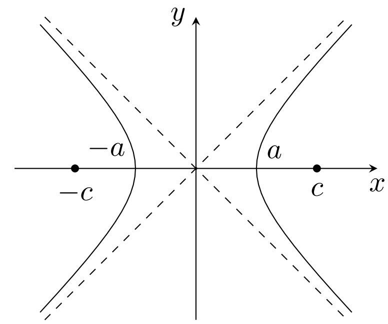
Antag, att brännpunkterna ligger i $(c,0)$ och $(-c,0)$ och att avståndsskillnaden från en punkt (x,y) på hyperbeln är $2a$. Alltså är $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$, där de olika tecknen gäller för de olika grenarna. Överflyttning, kvadrering, ytterligare överflyttning och kvadrering ger (på samma sätt som för ellipsen):



$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$. [Genomför räkningarna!].

Här är $c > a$, ty en sida (2c) i en triangel är alltid större än skillnaden (2a) mellan de två övriga sidorna. [Om en triangels sidor är s, t och u så är $s + t > u$, dvs. $s > u - t$]. Sätt nu $c^2 - a^2 = b^2$. Då fås att:

Ekvationen för en **hyperbel** med medelpunkt i origo och med *brännpunkterna på x-axeln* är
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Hyperbeln är symmetrisk m.a.p. båda koordinataxlarna. Den skär x-axeln, dvs. $y = 0$, i punkterna $x = \pm a$, men ej y-axeln.

Anmärkning: Ekvationen $x^2/a^2 - y^2/b^2 = -1$, dvs. $y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$, betyder en hyperbel med *brännpunkterna på y-axeln*. Den kallas <u>konjugathyperbeln</u> till $x^2/a^2 - y^2/b^2 = +1$.

En enkel koordinattransformation ger att:

$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ betyder geometriskt en <u>hyperbel</u> med medelpunkt i (x_0, y_0) och med axeln genom brännpunkten parallell med x-axeln.

Ö140. Angiv medelpunkt, brännpunktsaxel (samt parametrar a och b) för följande hyperblar:

<u>a</u>) $x^2 - y^2 = 4$ <u>b</u>) $2y^2 - 3x^2 = 6$

<u>c</u>) $x^2 + 4x = 2y^2 - 4y + 2$ <u>d</u>) $y^2 - y = 3x^2$ (Rita figur!)

Definition: En rät linje, till vilken en rörlig punkt på en kurva obegränsat närmar sig, då punkten allt mer avlägsnar sig från origo, kallas **asymptot** till kurvan.

Hyperbeln $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ har asymptoterna $y = \dfrac{b}{a} \cdot x$ och $y = -\dfrac{b}{a} \cdot x$.

Hyperbelns ekvation kan nämligen skrivas $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Härav följer för (t.ex.) $x > 0$ och $y > 0$, att skillnaden mellan kurvans och räta linjens (positiva) y-koordinater, dvs. differensen $\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \dfrac{b}{a}x = \dfrac{b}{a}(\sqrt{x^2-a^2} - x) =$ [förläng med konjugatuttrycket] $=$
$= \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{(x^2-a^2) - x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} \to 0$ då $x \to +\infty$. Alltså kurvan $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ närmar sig obegränsat linjen $y = \dfrac{b}{a}x$, då $x \to +\infty$.

[Analogt i de tre övriga kvadranterna. Jämför figuren ovan]. Resultatet ovan kan formuleras:

Hyperbeln $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ har asymptoterna $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$

ty den sista ekvationen ger $x^2/a^2 = y^2/b^2$, dvs. $y = \pm bx/a$.

Ö141. Bestäm asymptoterna till a) $x^2 - y^2 = 2$ b) $3x^2 - 4y^2 = 12$

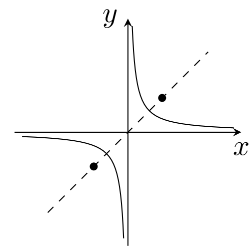
c) $3x^2 - 6y^2 = 1$. (Rita figur!)

Ö142. Angiv ekvationerna för asymptoterna till a) $(x - x_0)^2/a^2 - (y - y_0)^2/b^2 = 1$

b) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = -1$ c) $(x - x_0)^2/a^2 - (y - y_0)^2/b^2 = -1$.

Exempel: Ekvationen för hyperbeln $x^2 - y^2 = 2$ kan skrivas $(x - y)(x + y) = 2$ eller $\dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} = 1$. Om man sätter $u = (x - y)/\sqrt{2}$ och $v = (x + y)/\sqrt{2}$, [dvs. gör en koordinattransformation, som betyder en *vridning* av systemet 45°], så blir hyperbelns ekvation $u \cdot v = 1$.

Omvänt betyder ekvaitonen $x \cdot y = 1$, dvs. $y = 1/x$, en hyperbel med brännpunkterna på räta linjen $y = x$. Hyperbeln $xy = 1$ har x- och y-axlarna till asymptoter. Allmännare gäller:



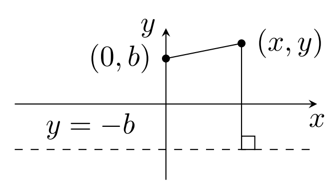
Ekvationen $x \cdot y = K$, där K är en konstant $\neq 0$, betyder geometriskt en hyperbel med medelpunkt i origo och med x- och y-axlarna som asymptoter.

Om $K > 0$ ligger hyperbeln i första och tredje kvadranten och om $K < 0$ så ligger den i andra och fjärde kvadranten.

3.6 Parabeln

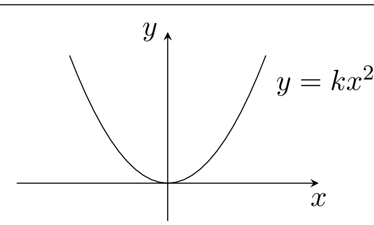
En parabel är en kurva, som består av alla punkter, som ligger lika långt från en given punkt (brännpunkten) som från en given rät linje (styrlinjen).

Antag, att brännpunkten ligger på y-axeln i punkten $(0, b)$ och att styrlinjen har ekvationen $y = -b$. Då gäller för punkter (x, y) på parabeln, att $\sqrt{x^2 + (y - b)^2} = y + b$, dvs. $x^2 + y^2 - 2by + b^2 = y^2 + 2by + b^2$.



Härav fås $x^2 = 4by$, dvs. $y = k \cdot x^2$ med $k = 1/4b$. För $k > 0$ ligger parabeln ovanför x-axeln och har origo som vändpunkt (vertex). För $k < 0$ ligger parabeln under x-axeln. Parabeln har i båda fallen y-axeln som *symmetriaxel.*

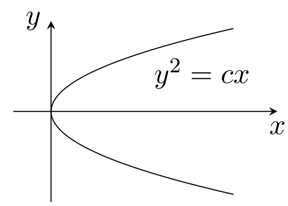
Ekvationen för en parabel med vertex i origo och *axeln utmed y-axeln* är $y = k \cdot x^2$.



Allmännare är $\boxed{y - y_0 = k \cdot (x - x_0)^2}$ ekvationen för en parabel med vertex i punkten (x_0, y_0) och axeln parallell med y-axeln.

Om parabeln istället har *symmetriaxeln parallell med x-axeln*, (och alltså styrlinjen parallell med y-axeln), så fås parabelns ekvation på formen $\boxed{(y - y_0)^2 = c \cdot (x - x_0)}$.

Om $c > 0$ så har parabeln öppning åt höger, dvs $x \geq x_0$, och om $c < 0$ så har den öppning åt vänster, $x \leq x_0$. Speciellt är $\boxed{y^2 = c \cdot x}$ ekvationen för en parabel med vertex i origo och *symmetriaxeln utmed x-axeln*.



Sammanfattning: 1) $y = Ax^2 + Bx + C$ betyder en parabel med axeln parallell med y-axeln, 2) $x = Ay^2 + By + C$ betyder en parabel med axeln parallell med x-axeln, (om $A \neq 0$).

Exempel: Angiv den geometriska betydelsen av ekvationen $y^2 + 4y + 7x = 1$.

Lösning: Ekvationen kan (med kvadratkomplettering) skrivas $y^2 + 4y + 4 = 1 + 4 - 7x$, dvs. $(y + 2)^2 = (-7) \cdot \left(x - \frac{5}{7}\right)$. Vi får alltså en parabel med vertex i $\left(\frac{5}{7}, -2\right)$ och axeln parallell med x-axeln (öppning åt vänster, dvs. $x \leq 5/7$).

Ö143. Angiv vertex och symmetriaxel till följande parabler:

a) $x^2 + 9y = 0$ b) $y^2 + 9x = 0$ c) $x^2 + 4x = 4y$ d) $9x^2 + 9y + 1 = 6x$

e) $3y^2 + 2x = y + 1$ (Rita figur!)

3.7 Andragradskurvor

Vi har sett att ekvationerna för ellips, hyperbel och parabel med axlar parallella med koordinataxlarna alltid kan skrivas på formen:

$$\boxed{A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x + D \cdot y + E = 0}$$

(Om kurvornas axlar ej är parallella med koordinataxlarna, så erhålles även xy-termer).

Omvänt kan den geometriska betydelsen av en given ekvation på formen ovan bestämmas genom kvadratkomplettering. Man kan skilja på följande fall:

1) Om A och B har samma tecken, dvs. om $A \cdot B > 0$, så fås en ellips, cirkel, punkt eller ingenting.

2) Om A och B har olika tecken, dvs. om $A \cdot B < 0$, så fås en hyperbel eller två skärande räta linjer.

3) Om $A = 0$, $B \neq 0$ eller $A \neq 0$, $B = 0$ fås en parabel, två parallella linjer eller ingenting.

4) Om $A = B = 0$ så fås en rät linje eller ingenting.

Anmärkning: Med "ingenting" menas att ekvationen saknar geometrisk betydelse, dvs. att det ej finns några punkter i xy-planet, som satisfierar ekvationen. [Detta inträffar om andragradsekvationen, med y som funktion av x eller tvärtom, har imaginära rötter. Exempelvis saknar ekvationen $x^2 + y^2 + 1 = 0$ geometrisk betydelse].

Exempel: Angiv den geometriska betydelsen av $x^2 + 3y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$.

Lösning: Med kvadratkomplettering erhålles

$$x^2 - 2x + 1 + 3(y^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{4}) + 2 = 1 + \frac{3}{4},$$

dvs. $(x-1)^2 + 3\big(y + \frac{1}{2}\big)^2 = -\frac{1}{4}$. Här är vänster led VL ≥ 0 medan höger led HL < 0. Ekvationen saknar alltså geometrisk betydelse.

Ö144. Angiv den geometriska betydelsen av $\underline{\text{a}}$) $4x^2 + 16x - 9y^2 + 18y = 29$

$\underline{\text{b}}$) $x^2 + 6x - 4y^2 + 9 = 0$ $\quad$ $\underline{\text{c}}$) $x^2 - 4x - 3y - 11 = 0$

$\underline{\text{d}}$) $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0$ $\quad$ $\underline{\text{e}}$) $2x^2 + 3x + 2y^2 - y + 1 = 0$

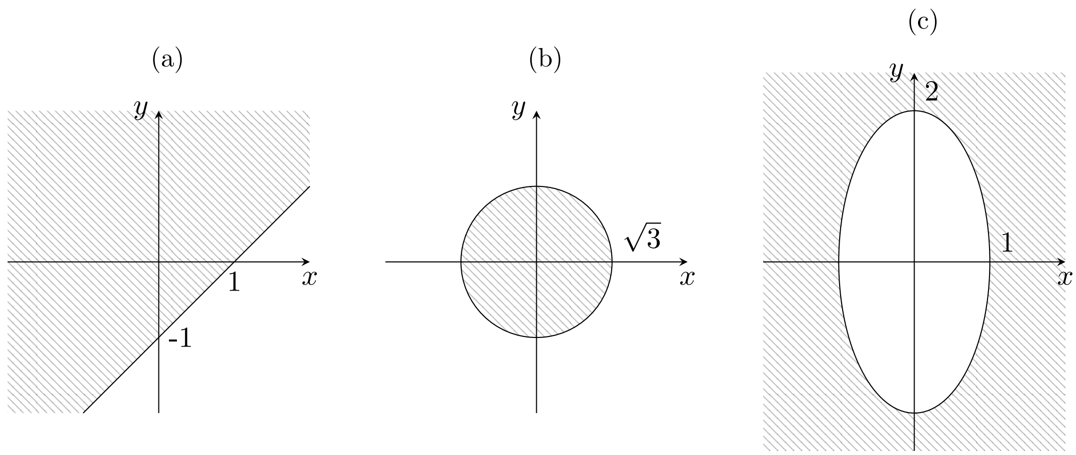
$\underline{\text{f}}$) $x^2 - 2y^2 - 4y + 6 = 0$ $\quad$ $\underline{\text{g}}$) $12y^2 + 16x + 12y + 7 = 0$ $\quad$ $\underline{\text{h}}$) $2x^2 - 7x + 6 = 0$

$\underline{\text{i}}$) $x^2 + 3x + 3y^2 - 3y + 4 = 0$ $\quad$ $\underline{\text{j}}$) $7y^2 + y + 18 = 0$ $\quad$ $\underline{\text{k}}$) $75x^2 + 2y^2 + 20y = 0$

$\underline{\text{l}}$) $45x^2 + 18y^2 + 30x + 12y + 7 = 0$.

3.8 Områden i xy-planet definierade med olikheter

Exempel: a) $x - y < 1$, dvs. $y > x - 1$ betyder halvplanet *ovanför* räta linjen $y = x - 1$. [Linjen ingår ej p.g.a. den stränga olikheten]. b) $x^2 + y^2 \leq 3$ betyder punktmängden *på och innanför* cirkeln med radien $\sqrt{3}$ och medelpunkten i origo. [Randen ingår p.g.a. olikheten: "$\leq$"]. c) $4x^2 + y^2 > 4$ betyder området (strängt) *utanför* ellipsen $x^2 + y^2/4 = 1$.



Ö145. Angiv, genom att rita figur, de områden i xy-planet som satisfierar olikheterna:

a) $x + y < 2$ b) $3y - 2x \geq 4$ c) $y + 2 > 0$

d) $y + 2 \geq 0, 2x - 1 \leq 0$ e) $|x - y| \leq 1$ f) $|x| + |y| < 3$ g) $x^2 + y^2 \geq 1$

h) $x^2 + y^2 < 4$ i) $x^2 + y^2 + 2x \leq 1$ j) $x^2 + y^2 > 3x - 2y$

k) $4x^2 + 9y^2 \leq 36$ l) $2x^2 - y^2 \leq 1$.

Ö146-149 (Reserv).

Kapitel 4

Funktionslära

4.1 Inledning

En *reell funktion*, som kan betecknas $y = f(x)$, är en *regel*, med vilken varje (reellt) x-värde, som tillhör en definitionsmängd D_f, tillordnas ett entydigt bestämt reellt y-värde. Mängden av y-värden kallas värdemängden V_f. En funktion $y = f(x)$ kan åskådliggöras med en kurva i ett xy-koordinatplan.

Exempel: $y = f(x) = x^2$ har som (naturlig) definitionsmängd alla x, $-\infty < x < \infty$, och som värdemängd alla icke-negativa y, $0 \leq y < \infty$.

Om $\underline{f(x) = x^2}$, så är $f(2) = 2^2 = 4$, $f(-1) = (-1)^2 = 1$ samt $f(t) = t^2$, $f(2t) = (2t)^2 = 4t^2$, $f(3x) = (3x)^2 = 9x^2$, $f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ och $f(\sin x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$. Vidare är $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ och $f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$.

Ö150. Antag att $y = f(x) = \sin x$. $\underline{a}$) Angiv definitionsmängd och värdemängd.

Bestäm $\underline{b}$) $f(0)$ $\underline{c}$) $f(\frac{3\pi}{2})$ $\underline{d}$) $f(2)$ $\underline{e}$) $f(2t)$ $\underline{f}$) $f(-x)$

$\underline{g}$) $f(2x+3)$ $\underline{h}$) $f(\cos x)$ $\underline{i}$) $f(f(f(x)))$.

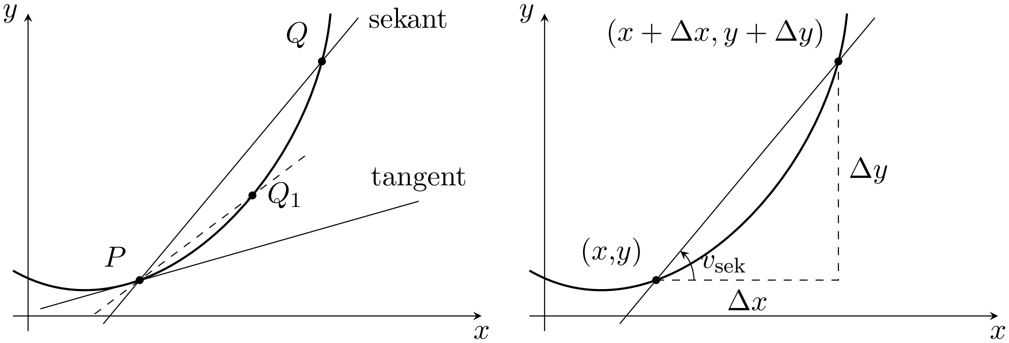
Ö151. Antag $y = f(x) = x^2 - 4x + 1$. $\underline{a}$) Angiv D_f och V_f. Bestäm

$\underline{b}$) $f(1)$ $\underline{c}$) $f(-7)$ $\underline{d}$) $f(2a)$ $\underline{e}$) $f(-x)$ $\underline{f}$) $f(x^2)$ $\underline{g}$) $f(1-x)$ $\underline{h}$) $f(e^x)$

$\underline{i}$) $f(f(x))$.

4.2 Derivatans definition

Med en <u>tangent</u> *till en kurva in en punkt* P menas en *gränslinje* till vilken en sekant (dvs. rät linje) genom P och en annan punkt Q på kurvan obegränsat närmar sig, då Q längs kurvan obegränsat närmar sig P.



Antag, att punkten P har koordinaterna (x,y), där $y = f(x)$, och att (den rörliga) punkten Q har koordinaterna $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, där $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Då har *sekanten* (dvs. räta linjen) genom P och Q riktningskoefficienten:

$$\boxed{k_{\text{sekant}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

(ty $k_{\text{sekant}} = \tan v_{\text{sek}}$, där v_{sek} är sekantens riktningsvinkel).

Riktningskoefficienten för *tangenten* genom (x,y) får man genom at låta Δx (och därmed också Δy) obegränsat gå mot noll:

$$\boxed{k_{\text{tangent}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)}$$

Detta gränsvärde kallas för <u>derivatan</u> av $y = f(x)$ i punkten (x,y). Vanliga beteckningar för derivatan är y', $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$ och $Df(x)$.

Anmärkning: Av definitionen följer, att derivatan $f'(x)$ existerar i en punkt om och endast om kurvan $y = f(x)$ har en tangent i punkten.

OBS: Derivatans värde $f'(x)$ *varierar* i allmänhet *med* x, ty tangenterna i *olika punkter* (x,y) på en kurva har (i allmänhet) olika riktningskoefficienter, (dvs. olika lutning).

Exempel: $\underline{y = f(x) = C}$, där C är en konstant, har derivatan $\underline{y' = f'(x) = 0}$ för alla x.

[$y = C$ är en rät linje parallell med x-axeln med riktningskoefficienten 0].

Exempel: <u>a</u>) $\underline{y = f(x) = x^2}$ har derivatan $\underline{f'(x) = 2x}$, ty *differenskvoten* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x \to 2x \text{ då}$$

$\Delta x \to 0$, dvs. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$. $\quad$ $\underline{\text{b}}$) $\underline{y = f(x) = x^3}$ har derivatan $\underline{f'(x) = 3x^2}$, ty $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$
$= \dfrac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$ = (enligt formen för $a^3 - b^3$) $= [(x + \Delta x) - x] \cdot [(x+\Delta x)^2 +$
$+ (x+\Delta x)x + x^2]/\Delta x = (x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)x + x^2 \to x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$, då $\Delta x \to 0$,
dvs. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$.

Exempel: Beräkna $f'(1)$ och $f'(-2)$, då $f(x) = x^3$.

Lösning: Enligt föregående exempel är $y' = f'(x) = 3x^2$ i en godtycklig punkt (x,y) på kurvan $y = x^3$. $x_1 = 1$ ger $\underline{f'(1)} = 3 \cdot 1^2 = \underline{3}$ och $x_2 = -2$ ger $\underline{f'(-2)} = 3 \cdot (-2)^2 = 3 \cdot 4 = \underline{12}$.

Ö152. Beräkna, om $f(x) = x^2$ $\quad$ $\underline{\text{a}}$) $f'(0)$ $\quad$ $\underline{\text{b}}$) $f'(3)$ $\quad$ $\underline{\text{c}}$) $f'(-7)$

Ö153. Härled $f'(x)$, om $f(x) = kx + m$, där k och m är konstanter.

Anmärkning: *Derivator av högre ordning* definieras successivt: $f''(x) = (f'(x))'$, $f'''(x) = (f''(x))'$ dvs. $\dfrac{d^2 f}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{df}{dx})$, $\dfrac{d^3 f}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{d^2 f}{dx^2})$ osv.

4.3 Enkla deriveringsregler. De elementära funktionernas derivator.

Av derivatans definition erhålles följande **räkneregler** (för summa, skillnad, produkt och kvot av funktioner):

1)	$y = u + v - w$	$\Rightarrow$	$y' = u' + v' - w'$
2)	$y = c \cdot u$	$\Rightarrow$	$y' = c \cdot u'$, $\quad$ då $\quad c =$ konstant,
3)	$y = u \cdot v$	$\Rightarrow$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
4)	$y = \dfrac{u}{v}$	$\Rightarrow$	$y' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Anmärkning: Formeln för derivatan av en produkt kan generaliseras till:

$$\boxed{(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'}$$

För de *elementära funktionerna* kan man härleda följande derivator:

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
konstant	0
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
b^x	$b^x \cdot \ln b$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$-1/\sin^2 x = -(1 + \cot^2 x)$

Exempel: a) $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$ ger [enligt formeln för x^a med $a = 1/2$]
$y' = \frac{1}{2} \cdot x^{1/2-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$. [Bra att kunna utantill!].
b) $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ ger $y' = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = \underline{-\frac{1}{x^2}}$
c) $y = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ ger $y' = (-n)x^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$.

Exempel: $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ger [enligt formeln för derivatan av en kvot $y = u/v$ med $u = \sin x$ och $v = \cos x$] : $y' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} =$
$= \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
[Detta är en härledning av derivatan av $y = \tan x$].

Exempel: a) $y = e^x \cdot \ln x$ ger [med $u = e^x$ och $v = \ln x$].
$y' = u' \cdot v + u \cdot v' = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x(x \ln x + 1)/x$
b) $y = \dfrac{2x+1}{x^4+3}$ ger [då $y = u/v$ där $u = 2x + 1$ och $v = x^4 + 3$],
$y' = \dfrac{u'v - u \cdot v'}{v^2} = \dfrac{2 \cdot (x^4+3) - (2x+1) \cdot 4x^3}{(x^4+3)^2} = \dfrac{6 - 4x^3 - 6x^4}{(x^4+3)^2}$.

Exempel: $y = x^5$ har $y' = 5x^4$ men $u = 5^x$ har $u' = 5^x \cdot \ln 5$.

OBS: Förväxla ej *potens*funktionen x^a med *exponential*funktionen a^x!!

Exempel: Beräkna $f'(3)$ om $\underline{f(x) = \ln(5x^2)}$.

Lösning: Vi kan (om vi vill) först omforma uttrycket för $f(x)$ med hjälp av logaritmlagarna. Vi har $f(x) = \ln(5x^2) = \ln 5 + \ln x^2 = \ln 5 + 2\ln x$, varför $f'(x) = 0 + 2 \cdot \dfrac{1}{x} = \underline{2/x}$. För $x = 3$ får vi $f'(3) = 2/3$.

OBS: *Med $f'(3)$ menas värdet av $f'(x)$ för $x = 3$.* Man måste alltså först beräkna allmänna uttrycket för $f'(x)$ och sedan sätta in det speciella x-värdet. Gjorde man tvärtom, så skulle ju derivatan bli noll (för alla x-värden och alla funktioner!), eftersom derivatan av en konstant är noll. (Alltför vanligt teknologfel!)

Ö154. Derivera a) $5x^3 - 6x + 7$ b) $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ c) $2e^x - 3\cos x$

d) $x \cdot \sin x$ e) $2x^3 \cdot \cos x$ f) $e^x \cdot \sqrt{9x}$ g) $1/\cos x$ h) $1/(x^2 + 5\ln x)$,

i) $1/(1 + \tan x)$ j) $x/\sin x$ k) $(2x+1)/(x+2)$ l) $(x^2+3)/(x^3+1)$

m) $e^x/\ln(x^2)$ n) $(x+1)/\sqrt{x}$ o) $(3x^2 - 2x + 1)/(x^3 + 2x + 1)$ p) $x^2 \cdot 2^x$

q) $3^x/x^3$ r) $x^4 \cdot e^x \cdot \sin x$ s) $\sqrt{x} \cdot (\ln x)/(x^2+1)$.

Ö155. Bestäm $f''(x)$ on $f(x)$ är a) $x^3 + 1/x^3$ b) $e^x \cdot \cos x$

c) $\sqrt{x} \cdot \ln x$ d) $(\sin x)/x$.

Ö156. Beräkna a) $f'(\pi/4)$ om $f(x) = \tan x$ b) $f'(1)$ om $f(x) = e^x \cdot \ln x$

c) $f'(-2)$ om $f(x) = (x+3)/(x^3+2)$ d) $f'(4)$ om $f(x) = 2^x \cdot \ln \sqrt{x}$

e) $f''(2)$ om $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$.

4.4 Sammansatta funktioner. Kedjeregeln.

Exempel: Funktionen $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 8}$ kan betraktas som en *sammansättning* $f(x) = h(g(x))$ av funktionerna $g(x) = x^2 + x - 8$ och $h(x) = \sqrt{x}$, (som också kan skrivas $h(z) = \sqrt{z}$). [Om man t.ex. skall beräkna $f(3)$, då $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 8}$, så beräknar man ju först värdet av $x^2 + x - 8 = g(x)$ för $x = 3$, dvs. $g(3) = 9 + 3 - 8 = 4$ och får sedan $f(3) = \sqrt{g(3)} = \sqrt{4} = 2$]. Vi illustrerar sammansättningen med figuren:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[rr, bend left=50, "f"] & z = g(x) \arrow[r, bend left, "h"] & y = h(z) = h(g(x)) = f(x) \end{tikzcd}$$

Ö157. Bestäm $h(g(x))$ om a) $g(x) = 2x - 1$, $h(x) = \cos x$

b) $g(x) = 2x^2 + x - 1$, $h(x) = \ln x$ c) $g(x) = 3x^2 + 1$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $g(x) = x^3 + 1$, $h(x) = \sqrt{x}$ e) $g(x) = \ln x$, $h(x) = e^x$.

Ö158. Bestäm $g(h(x))$ med $g(x)$ och $h(x)$ givna i Ö157. [**OBS:** I allmänhet är $g(h(x))$ ej lika med $h(g(x))$].

För *derivatan av en sammansatt funktion* gäller **kedjeregeln**:

Om $y = h(z)$, där $z = g(x)$, dvs. $y = h(g(x))$, så är

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}, \quad \text{dvs.} \quad \frac{d}{dx}[h(g(x))] = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Anmärkning: $\dfrac{dz}{dx} = g'(x)$ kallas inre derivatan av $h(g(x))$.

OBS: Kedjeregeln är nog den ”*viktigaste räkneregeln*” för en teknolog! Den används ständigt i integral- och differentialkalkyl!

Exempel: Beräkna derivatan av $y = \sqrt{x^2 + x - 8}$.

Lösning: Vi kan skriva $y = \sqrt{z}$ med $z = x^2 + x - 8$ och använda kedjeregeln: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx}$.
Vi har $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{d(\sqrt{z})}{dz} = \dfrac{1}{2\sqrt{z}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x-8}}$ och $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 8) = 2x + 1$. Alltså är $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x-8}} \cdot (2x+1) = \dfrac{2x+1}{2 \cdot \sqrt{x^2+x-8}}$, dvs. $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x^2+x-8}) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-8}}$.

Tillägg: På samma sätt visas allmänt (med kedjeregeln) att $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{z}) = \dfrac{d(\sqrt{z})}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \dfrac{dz}{dx}$,
dvs. att $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\sqrt{g(x)}) = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}}$, om $y = h(z) = \sqrt{z}$.

Exempel: a) $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{1-x}) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$, b) $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{e^x+1}) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$.

Exempel: Beräkna *derivatan av* $y = \ln g(x)$, då $g(x) > 0$.

Lösning: Med $y = \ln z$ och $z = g(x)$ fås enligt kedjeregeln $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{d(\ln z)}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} =$
$= \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$.

Svar: $\boxed{\dfrac{d}{dx} \ln g(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}}$, som är en mycket användbar formel!

OBS: Formeln $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ medför t.ex. att $\dfrac{d}{dt}(\ln t) = \dfrac{1}{t}$, $\dfrac{d}{du}(\ln u) = \dfrac{1}{u}$, $\dfrac{d}{dz}(\ln z) =$
$= \dfrac{1}{z}$, $\dfrac{d}{dö}(\ln ö) = \dfrac{1}{ö}$, osv. (En deriveringsregel gäller oberoende av de bokstäver som används!)
Däremot är $\dfrac{d}{dx}(\ln z)$ <u>ej</u> lika med $\dfrac{1}{z}$, utan $\dfrac{d}{dx}(\ln z) = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{dz}{dx}$ enligt kedjeregeln.

Exempel: <u>a</u>) $\dfrac{d}{dx}[\ln(\sin x)] = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$, om $g(x) = \sin x$
<u>b</u>) $\dfrac{d}{dx}[\ln(x^2 + x + 4)] = \dfrac{2x+1}{x^2+x+4}$
<u>c</u>) $\dfrac{d}{dx}[\ln(5x^2)] = \dfrac{5 \cdot 2x}{5 \cdot x^2} = 2/x$ (Jämför tidigare exempel i paragraf 4.3).

Exempel: $y = \ln(-x)$ är definierad för $(-x) > 0$, dvs. $x < 0$. Enligt formeln ovan med $g(x) = -x$ blir derivatan $y' = \dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{-1}{-x} = +\dfrac{1}{x}$, för $x < 0$. Men $-x = |x|$ för $x < 0$. Alltså är $\dfrac{d}{dx} \ln|x| = \dfrac{1}{x}$ för $x < 0$. För $x > 0$ är ju $|x| = x$ och därför $\dfrac{d}{dx} \ln|x| = \dfrac{d}{dx} \ln x = \dfrac{1}{x}$. Alltså gäller att $\boxed{\dfrac{d}{dx} \ln|x| = \dfrac{1}{x}}$ för alla $x \neq 0$.

Allmännare fås med kedjeregeln (ytterligare en gång):

$\boxed{\dfrac{d}{dx}\ln|g(x)| = \dfrac{g'(x)}{g(x)}}$, som alltså gäller både för $g(x) > 0$ och $g(x) < 0$.

Exempel: Derivera $f(x) = \ln|\dfrac{2x+3}{x^2-1}|$.

Lösning: Skriv först om $f(x)$ med hjälp av logaritmlagarna! Man får $f(x) =$
$= \ln|2x+3| - \ln|x^2-1|$. Då blir $f'(x) = \frac{2}{2x+3} - \frac{2x}{x^2-1} = 2\cdot\frac{(x^2-1)-(2x+3)x}{(2x+3)(x^2-1)} = (-2)\cdot\frac{x^2+3x+1}{(2x+3)(x^2-1)}$.

Ö159. Bestäm en formel för derivatan av a) $e^{g(x)}$ b) $\sin(g(x))$ c) $\cos(g(x))$

d) $\tan(g(x))$ e) $[g(x)]^n$ f) $1/g(x)$. [Här förutsättes naturligtvis, att g är *deriverbar*, dvs. att $g'(x)$ existerar].

Ö160. Bestäm $f'(x)$ då $f(x)$ är a) $e^{4x} + e^{1-2x}$ b) $\sin(3x+1)$

c) $\cos(x^2)$ d) $\cos^2 x$ e) $\sin(5e^x)$ f) $\sqrt{21x-1}$ g) $\sqrt{3x^4+7}$ h) $(x^2+5x)^2$

i) $(1-x^4)^3$ j) $\ln(7x+3) + \ln(1-x)$ k) $\ln(4-3x-5x^2)$ l) $e^{x^2+\sqrt{x}}$

m) $\tan(\ln|x|)$ n) $\cot\sqrt{x}$ o) $\ln(\cos x)$ p) $\ln|\tan x|$ q) $\ln|\dfrac{x-1}{x+1}|$

r) $\ln\dfrac{1+3x}{1-3x}$ s) $\ln|\dfrac{2x-1}{x^2+x+1}|$ t) $\ln\dfrac{3x^2+7x+1}{1-x^2+5x^3}$.

Ö161. Beräkna a) $f'(0)$ då $f(x) = \ln(5-3x)$ b) $f'(1/2)$ då $f(x) = 3\cos(\pi x)$

c) $f'(7)$ då $f(x) = e^{x^2-5x-14}$ d) $f'(\pi/4)$ då $f(x) = \ln(20\tan x)$

e) $f'(2)$ då $f(x) = \ln\dfrac{16-4x}{3x-1}$ f) $f'(-1)$ då $f(x) = \ln|\dfrac{7x^2+5x-3}{6-3x^2+x^5}|$.

Ö162. Bestäm konstanten k så att $y = e^{kx}$ satisfierar *differentialekvationen*

a) $y' + 5y = 0$ b) $y'' - y' - 2y = 0$ c) $y''' + 4y'' + y' - 6y = 0$.

Exempel: Beräkna derivatan av $e^{2x}\cdot\sqrt{x^3+1}$.

Lösning: Med kedjeregeln får man $\dfrac{d}{dx}(e^{2x}) = 2e^{2x}$ och $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x^3+1}) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$. Produktregeln ger $\dfrac{d}{dx}(e^{2x}\cdot\sqrt{x^3+1}) = \dfrac{d}{dx}(e^{2x})\cdot\sqrt{x^3+1} + e^{2x}\cdot\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x^3+1}) = 2e^{2x}\cdot$
$\cdot\sqrt{x^3+1} + e^{2x}\cdot\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} = e^{2x}[4(x^3+1)+3x^2]/(2\sqrt{x^3+1})$.

Ö163. Derivera a) $e^{x^2} \cdot \ln(2x+7)$ b) $\sqrt{x} \cdot \cos(x^3)$ c) $\sin(2-x) \cdot \cos 5x$

d) $e^{2x}/\sqrt{x^3+1})$.

Ö164. Beräkna a) $f'(0)$ då $f(x) = e^{3x} \cdot \sqrt{5x+4}$ b) $f'(1)$ då $f(x) = x^3 \cdot \ln(2-x^2)$

c) $f'(-3)$ då $f(x) = \sqrt{x^2+7} \cdot \ln[(x^2-1)/(x+4)]$.

Ö165. Bestäm (de reella) konstanterna a och b så att $y = e^{ax} \cdot \cos bx$ satisfierar

a) $y'' + 2y' + 3y = 0$ b) $y''' - y'' + 3y' + 5y = 0$.

Anmärkning: Om man t.ex. skall derivera $y = \sin\sqrt{3x^2+1}$ kan man göra en ytterligare uppdelning av den sammansatta funktionen och använda en *upprepad kedjeregel*:

Om $y = k(w)$, där $w = h(z)$ och $z = g(x)$, dvs. $y = k(h(g(x)))$, så är $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dw} \cdot \dfrac{dw}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx}$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "g"] & z = g(x) \arrow[r, bend left, "h"] & w = h(z) = h(g(x)) \arrow[r, bend left, "k"] & y = k(w) = k(h(g(x))) \end{tikzcd}$$

Exempel: Derivera $\sin\sqrt{3x^2+1}$.

Lösning: Sätt $y = \sin w$ med $w = \sqrt{z}$ och $z = 3x^2+1$. Då fås $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dw} \cdot \dfrac{dw}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = \cos w \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{z}} \cdot 6x = \cos(\sqrt{3x^2+1}) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{3x^2+1}} \cdot 6x = \dfrac{3x \cdot \cos\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{3x^2+1}}$.

Ö166. Derivera a) $\cos^2 3x$ b) $e^{\sin(x^2)}$ c) $\sin(e^{x^2})$ d) $e^{\sin^2 x}$

e) $\ln|\tan(1-x^2)|$ f) $e^{3\sqrt{1-2x^2}}$ g) $\ln(1+e^{\sqrt{x}})$

Vid derivering av uttryck på formen $f(x) = [G(x)]^{H(x)}$ göres först omskrivningen: $f(x) = e^{H(x) \cdot \ln G(x)}$.

Denna omskrivning är tillåten ty allmänt gäller att $y = e^{\ln y}$ för $y > 0$ och $\ln y = \ln[G(x)]^{H(x)} =$ [enligt en av logaritmlagarna] $= H(x) \cdot \ln G(x)$, om $y = [G(x)]^{H(x)}$.

Exempel: Derivera $f(x) = (x^2+1)^x$.

Lösning: Vi skriver $f(x) = e^{x \cdot \ln(x^2+1)}$ och får $f'(x) = e^{x \cdot \ln(x^2+1)} \cdot \frac{d}{dx}[x \cdot \ln(x^2+1)] = e^{x \cdot \ln(x^2+1)} \cdot [1 \cdot \ln(x^2+1) + x \cdot \frac{2x}{x^2+1}] = (x^2+1)^x \cdot [(x^2+1)\ln(x^2+1) + 2x^2]/(x^2+1) =$
$= (x^2+1)^{x-1}[(x^2+1)\ln(x^2+1) + 2x^2]$.

Ö167. Derivera <u>a</u>) $(x+1)^x$ <u>b</u>) x^{x+1} <u>c</u>) $(x^2+x+1)^{x^2}$ <u>d</u>) $x^{\ln x}$.

Ö168. Beräkna <u>a</u>) $f'(0)$ om $f(x) = (x+2)^{x+1}$ <u>b</u>) $f'(2)$ om $f(x) = (x^2+1)^{x^2+1}$

<u>c</u>) $f'(4)$ om $f(x) = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$.

4.5 Implicit derivering

Ekvationen för en halvcirkel (med medelpunkt i origo) kan anges på olika sätt. I ekvationen $x^2+y^2 = R^2$, $y \geq 0$, kan y betraktas som en <u>implicit</u> given funktion av x. Med $y = \sqrt{R^2-x^2}$ är y däremot given på <u>explicit</u> form. En funktion, som är implicit given kan <u>inte</u> *alltid* uttryckas på explicit form, t.ex. kan ej y uttryckas explicit, om $x^5+xy+y^5 = 1$. Ändå kan man med hjälp av *kedjeregeln* för sammansatta funktioner bestämma derivatan $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Exempel: Om vardera ledet i ekvationen $\underline{x^2+y^2 = R^2}$ deriveras med avseende på x, varvid y betraktas som en implicit given funktion av x, $y = f(x)$, så fås $\dfrac{d}{dx}(x^2+y^2) = \dfrac{d}{dx}(x^2) +$
$+\dfrac{d}{dx}(y^2) = \underline{2x + 2y\cdot y' = 0}$.

Man har nämligen att $\dfrac{d}{dx}(y^2) = \dfrac{d(y^2)}{dx} = \{\text{kedjeregeln}\} = \dfrac{d(y^2)}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = 2y\cdot\dfrac{dy}{dx} = 2y\cdot y'$ och $\dfrac{d}{dx}(R^2) = 0$, då R^2 är en konstant. Vi får alltså $y' = -x/y$, (för $y \neq 0$). Detta resultat kunde också erhållits genom derivering av $y = \sqrt{R^2-x^2}$ eller $y = -\sqrt{R^2-x^2}$. [Genomför räkningarna!].

Exempel: Bestäm derivatan y' om $x^5 + x\cdot y + y^5 = 1$.

Lösning: Implicit derivering m.a.p. x ger $5x^4 + 1\cdot y + x\cdot\frac{dy}{dx} + 5y^4\cdot\frac{dy}{dx} = 0$, dvs.
$\underline{y' = \frac{dy}{dx} = -(5x^4+y)/(x+5y^4)}$, ty $\dfrac{d}{dx}(x\cdot y) = [\text{Produktformeln}] = \dfrac{d(x)}{dx}\cdot y + x\cdot\dfrac{dy}{dx} = 1\cdot y + x\cdot y'$ och $\dfrac{d}{dx}(y^5) = [\text{Kedjeregeln}] = \dfrac{d(y^5)}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = 5y^4\cdot y'$.

Ö169. Bestäm ett uttryck för derivatan $y' = \frac{dy}{dx}$, då <u>a</u>) $x^3+xy+y^3 = 1$

<u>b</u>) $2xy^2 - y^4 + 1 = 0$ <u>c</u>) $x^3y^2 + x^2y^3 = 1$ <u>d</u>) $x^2y = 1 + \ln(xy)$

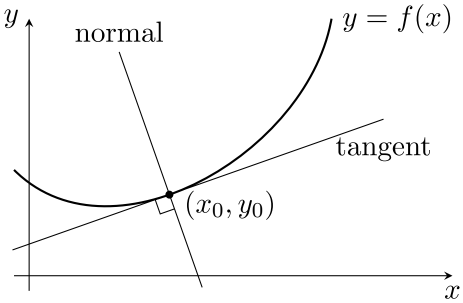
<u>e</u>) $y\cdot e^{x+y} = x$ <u>f</u>) $\sin y = x$ <u>g</u>) $\tan y = x$.

Ö170. Bestäm <u>a</u>) $\dfrac{dy}{dx}$ i punkten (2,1) på kurvan $x^3+xy+y^3 = 11$

<u>b</u>) y' i punkten (2,3) på ellipsen $9x^2+4y^2 = 72$ <u>c</u>) y' för $x = 0$, om $e^x+xy = \ln y$.

4.6 Tangent och normal till en kurva

Enligt derivatans definition (paragraf 4.1) är *riktningskoefficienten* för tangenten i en punkt $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ på kurvan $y = f(x)$ lika med *derivatans värde* $f'(x_0)$ i punkten. Med normalen *till en kurva* i en punkt menas den räta linje, som skär tangenten *vinkelrätt* i punkten.
Eftersom produkten av tangentens och normalens riktningskoefficienter är -1, gäller alltså att:



1) Tangentens riktningskoefficient: $k_{\text{tangent}} = f'(x_0)$

2) Normalens riktningskoefficient: $k_{\text{normal}} = -1/f'(x_0)$, om $f'(x_0) \neq 0$.

Insättning i *enpunktsformeln för räta linjen*: $\boxed{y - y_0 = k \cdot (x - x_0)}$ ger, (med $y_0 = f(x_0)$):

1) tangentens ekvation: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ och

2) normalens ekvation: $y - f(x_0) = \dfrac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$, om $f'(x_0) \neq 0$.

Om $\underline{f'(x_0) = 0}$, så är tangenten $y = y_0 = f(x_0)$ parallell med x-axeln och normalen $x = x_0$ parallell med y-axeln.

Exempel: Bestäm ekvationen för tangent och normal till $y = f(x) = (x^3 - 2)^2$ i punkten a) $(-1{,}9)$ b) $(0{,}4)$.

Lösning: Bilda $y' = f'(x) = 2 \cdot (x^3 - 2) \cdot 3x^2$. a) $\underline{x_0 = -1}$ ger $f'(-1) = 2(-1-2) \cdot 3 \cdot 1 = -18$. Tangentens ekvation blir $y - 9 = -18(x + 1)$, dvs. $\underline{18x + y + 9 = 0}$ och normalens ekvation $y - 9 = \dfrac{1}{18}(x + 1)$, dvs. $\underline{x - 18y + 163 = 0}$. b) $\underline{x_0 = 0}$ ger $f'(0) = 0$. Alltså är tangentens ekvation $y - 4 = 0 \cdot (x - 0)$, dvs. $\underline{y = 4}$ (linje parallell med x-axeln) och normalens ekvation $\underline{x = 0}$ (dvs. y-axeln).

Exempel: Bestäm ekvationen för tangent och normal till $x^5 + xy + y^5 = 1$ i punkten $(1{,}0)$.

Lösning: Implicit derivering ger $5x^4 + 1 \cdot y + x \cdot y' + 5y^4 \cdot y' = 0$. Insättning av punktens koordinater $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, ger $5 + 0 + y' + 0 = 0$, dvs. $y' = f'(1) = -5$, om $y = f(x)$. Riktningskoefficienten för tangenten i punkten $(x_0, y_0) = (1{,}0)$ är alltså -5 och tangentens ekvation: $y - 0 = -5(x - 1)$, dvs. $\underline{5x + y - 5 = 0}$. Normalens riktningskoefficient är $-1/(-5) = +1/5$ och dess ekvation: $y - 0 = \dfrac{1}{5}(x - 1)$ dvs. $\underline{x - 5y - 1 = 0}$.

Ö171. Bestäm ekvationer för tangent och normal i en punkt (x_0, y_0) på kurvan $y = f(x)$, då

a) $y = x^3$ och $x_0 = 2$ b) $y = \ln x$, $x_0 = 3$

c) $y = e^x - x$, $x_0 = 0$ d) $y = 2 \cdot \ln(5 - x)$, $x_0 = 4$ e) $y = x \cdot \cos x$, $x_0 = \pi$

f) $y = (x^2 + 1)/(3x + 1)$, $x_0 = -2$ g) $y = \ln(3x^2 + 5x + 3)$, $x_0 = -1$

h) $y = e^{x^2} \cdot \sqrt{x^3 + 3}$, $x_0 = 1$ i) $y = \ln |\dfrac{4 - 7x - 3x^2}{2x^3 + 6x^2 + 1}|$, $x_0 = -3$.

Ö172. Bestäm ekvationer för tangent och normal till a) $x^2 + y^2 = 5$ i punkten $(1, -2)$

b) $2x^2 + 3x + 2y^2 + y = 8$ i punkten (1,1)

c) $2x^2 + 4y^2 - 6y = 0$ i punkten (-1,1)

d) $x^3 + xy + y^3 = 1$ i punkten (0,1) e) $e^{2y - x + 1} = 1 + 2 \cdot \ln(xy)$ in punkten (2,1/2).

Ö173. Bestäm de gemensamma tangenterna till
a) ellipsen $12x^2 + 25y^2 = 300$ och cirkeln $x^2 + y^2 = 16$

b) ellipserna $9x^2 + 16y^2 = 144$ och $16x^2 + 9y^2 = 144$.

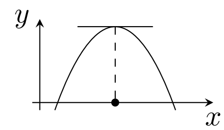
4.7 Maximi- och minimiproblem

En punkt x_0, som tillhör definitionsmängden D_f, säges vara en *lokal maximipunkt* för $y = f(x)$, om det finns en (liten) omgivning till x_0, där $f(x) \leq f(x_0)$, [x tillhör D_f]. Analogt för lokal minimipunkt: $f(x) \geq f(x_0)$ i en omgivning till x_0.

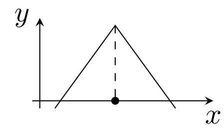
Ett funktionsvärde kan vara ett lokalt maximivärde, utan att vara ett absolut maximum, dvs. största värdet av funktionen i definitionsmängden. Men omvänt måste största värdet, om det existerar, vara ett lokalt maximivärde.

Lokala maximi- och minimipunkter till $y = f(x)$, finns att *söka bland* följande tre typer av punkter:

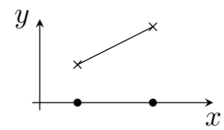
1° Punkter, där $f'(x) = 0$, dvs. där tangenten är parallell med x-axeln.



2° Punkter, där $f'(x)$ *ej existerar*, t.ex. spetsar.



3° *Randpunkter*, dvs. ändpunkter för definitionsintervallet.



Villkoret (i 1° ovan) att $f'(x) = 0$ är *ej tillräckligt* för att en punkt skall vara lokal maximi- eller minimipunkt. Punkten kan vara en så kallad terrasspunkt. [T.ex. är (0,0) en terrasspunkt på kurvan $y = x^3$]. **Tillräckliga villkor** kan fås med någon av följande två metoder, (då x_0 är en inre punkt i D_f):

Metod 1:

a) $(x_0, f(x_0))$ är en *lokal maximipunkt* om $f'(x) > 0$ i en vänsteromgivning och $f'(x) < 0$ i en högeromgivning till x_0.

b) $(x_0, f(x_0))$ är en *lokal minimipunkt* om $f'(x) < 0$ i en vänsteromgivning och $f'(x) > 0$ i en högeromgivning till x_0.

Anmärkning: Positiv derivata, $f'(x) > 0$ (i ett intervall) medför nämligen att $f(x)$ är (strängt) växande i intervallet medan $f'(x) < 0$ medför att $f(x)$ är (strängt) avtagande.

Metod 2:

a) $(x_0, f(x_0))$ är en *lokal maximipunkt* om $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) < 0$

b) $(x_0, f(x_0))$ är en *lokal minimipunkt* om $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) > 0$.

Exempel: Sök lokala maximi- och minimipunkter till $f(x) = x^3 + 6x^2$.

Lösning: 1° Bilda $f'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x + 4)$.

Ekvationen $f'(x) = 0$ har rötterna $x_1 = -4$ och $x_2 = 0$.

Teckenstudium:

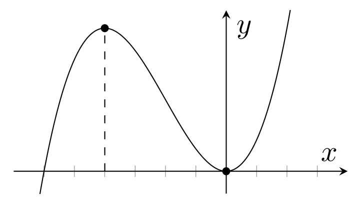
(Metod 1)

	$x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	$+++$	0	$---$	0	$+++$
$f(x)$	$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$
	(väx.)	(max.)	(avt.)	(min.)	(väx.)

ger lokalt maximum: $f(-4) = (-4)^3 + 6 \cdot (-4)^2 = 32$ och lokalt minimum $f(0) = 0$.

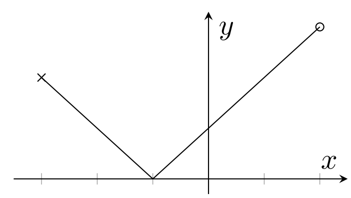
[Eller (Metod 2): $f''(x) = 6x + 12 = 6(x + 2)$ ger $f''(-4) = -12 < 0$, dvs. maximum för $x = -4$, resp. $f''(0) = +12 > 0$, dvs. minimum för $x = 0$.]

Punkterna 2° och 3° i vår undersökning ger ingenting, ty $f'(x) = 3x^2 + 12x$ existerar för alla x, och randpunkter saknas, eftersom $f(x) = x^3 + 6x^2$ är definierat för alla $x, -\infty < x < \infty$.
Svar: Lokalt maximum $f(-4) = 32$ och lokalt minimum $f(0) = 0$.



Anmärkning: Funktionen $f(x) = x^3 + 6x^2$ *saknar* såväl största som minsta värde, ty $f(x) \to +\infty$ då $x \to +\infty$ och $f(x) \to -\infty$, då $x \to -\infty$.

Exempel: Antag $f(x) = |x + 1|$ för $-3 \leq x < 2$. $f(x)$ har ett lokalt minimum $f(-1) = 0$ och ett lokalt maximum $f(-3) = 2$. $f(x)$ har ett minsta värde $f(-1) = 0$ men saknar största värde, (ty $x = 2$ tillhör ej definitionsmängden).



Ö174. Sök lokala maxima och minima samt största och minsta värde, om $f(x)$ är

a) $x^2 + 4x + 5$ b) $2 + 4x - 3x^2$ c) $3x - x^3 + 2$

d) $3x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 12x + 1$ e) $8x^3 + 3x^2 - 6x^4 - 6x$

f) $|2x + 1|, -3 < x \leq 1$ g) $|x^2 - 4|, -3 \leq x \leq 4$ h) $e^x - 2x$

i) $x + \ln x - 2\ln(x - 1)$ j) $e^x \cdot \cos x$ d) $\sqrt{x^2 + x + 1} \cdot e^{-x/2}$ l) $\sqrt{x^2 - 3x + 2}/x$.

4.8 Några gränsvärden. (Obestämda uttryck).

Vi förutsätter (det intuitiva) gränsvärdesbegreppet känt och tillämpar på några exempel.

A) **Gränsvärden av rationella funktioner, då $x \to x_0$**

Exempel: Bestäm gränsvärdet av $f(x) = (3x^2 - 5x - 2)/(x^2 - 4)$, då $x \to 2$, (dvs. då x obegränsat närmar sig $x_0 = 2$).

Lösning: Då $x \to 2$, går uttrycket *formellt* mot ”$\dfrac{12 - 10 - 2}{4 - 4}$”, dvs. ”$\frac{0}{0}$”, som är ett så kallat obestämt uttryck. Men $f(x)$ är en rationell funktion, dvs. kvoten mellan två polynom $T(x) = 3x^2 - 5x - 2$ och $N(x) = x^2 - 4$. Båda dessa *polynom* har $x = 2$ som *nollställe*, (dvs. *ekvationerna* $T(x) = 0$ och $N(x) = 0$ har en gemensam *rot* $x_0 = 2$). Enligt faktorsatsen (paragraf 1.8) är då $(x-2)$ en faktor både i $T(x)$ och i $N(x)$. Vi får $T(x) = (x-2)(3x+1)$ och $N(x) = (x-2)(x+2)$. För $x \neq 2$ är alltså $f(x) = \dfrac{T(x)}{N(x)} = \dfrac{(x-2)(3x+1)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{3x+1}{x+2}$, som går mot $\dfrac{7}{4}$ då $x \to 2$.

$f(x) = (3x^2 - 5x - 2)/(x^2 - 4)$ har alltså gränsvärdet 7/4, då x obegränsat närmar sig $x_0 = 2$. Vi skriver: "$f(x) \to 7/4$, då $x \to 2$" eller "$\lim_{x \to 2} f(x) = 7/4$."

OBS: Blanda ej ihop de två skrivsäten för gränsvärden:

$$\boxed{f(x) \to A, \quad \text{då} \quad x \to x_0 \quad \underline{\text{eller:}} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = A}$$

dvs. antingen *pil* utan limestecken eller också *limestecken* och *likhetstecken*!!

Ö175. Bestäm gränsvärdet av a) $(2x-6)/(x^2-9)$, då $x \to 3$

b) $(x^2 + x - 2)/(3x^2 - x - 2)$, då $x \to 1$

c) $(2x^2 + 3x + 1)/(4x^2 + 3x - 1)$, då $x \to -1$

d) $(5x^2 - 9x - 2)/(x^3 - x^2 - x - 2)$, då $x \to 2$

e) $(x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 8x + 3)/(x^3 + 4x^2 + 4x + 3)$, då $x \to -3$.

B) **Gränsvärden av rationella funktioner, då** $x \to +\infty$

Vi vet att $\dfrac{1}{x}$ går mot noll, då $x \to +\infty$ eller $x \to -\infty$. [Hyperbeln $y = 1/x$ har x-axeln, dvs. $y = 0$, som asymptot då $x \to +\infty$ eller $x \to -\infty$. (Jämför paragraf 3.5)].

Exempel: Bestäm gränsvärdet av $f(x) = \dfrac{(2x^2 - x + 1)(2x^3 + 4x^2 - x + 2)}{3x^5 + 4x^4 - 5x + 1}$ då $x \to +\infty$.

Lösning: Formellt går $f(x)$ mot "$\frac{\infty}{\infty}$" (då $x \to \infty$), som är ett *obestämt uttryck*. Uttrycket för $f(x)$ kan dock omformas. (Bryt ut högstagradspotensen i varje parantes). Vi får

$$f(x) = \frac{x^2(2 - 1/x + 1/x^2) \cdot x^3(2 + 4/x - 1/x^2 + 2/x^3)}{x^5(3 + 4/x - 5/x^4 + 1/x^5)} = [\text{förkorta med } x^5] =$$
$$= \frac{(2 - 1/x + 1/x^2)(2 + 4/x - 1/x^2 + 2/x^3)}{3 + 4/x - 5/x^4 + 1/x^5} \to \frac{(2+0+0)(2+0+0+0)}{3+0+0+0} = \frac{4}{3}, \quad \text{då } x \to +\infty.$$

Alltså: $f(x) \to 4/3$ då $x \to \infty$, dvs. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 4/3$.

Anmärkning: Vi får också att $f(x) \to 4/3$ då $x \to -\infty$, dvs. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4/3$.

Ö176. Bestäm gränsvärdet, då $x \to \pm\infty$, av a) $(2x+1)/(3x-1)$

b) $3x^2+2x-4)/(2-x-x^2)$ c) $(x^2+7)/(5x^3+4x+1)$

d) $(2x-1)(x^2-3)/(x-7x^3+1)$ e) $(3x^2+1)(1-5x)(x^2-x+6)/(4x^5+x^3-1)$.

C) **Gränsvärden av vissa rotfunktioner** [Jämför härledningen av ekvationerna för hyperbelns asymptoter (paragraf 3.5)].

Exempel: Bestäm gränsvärdet av $f(x) = \sqrt{x^2+3x} - x$, då $x \to +\infty$.

Lösning: [Formellt går $f(x)$ mot "$\infty - \infty$", som är ett *obestämt uttryck*]. Förläng med konjugatuttrycket till $f(x)$. (Jämför paragraf 1.5). Man får $f(x) = \sqrt{x^2+3x} - x = [(\sqrt{x^2+3x})^2 - x^2]/[\sqrt{x^2+3x} + x] = [x^2+3x-x^2]/[\sqrt{x^2(1+3/x)} + x] = 3x/[|x| \cdot \sqrt{1+3/x} + x]$. Men $|x| = x$ för $x > 0$. För $x > 0$ är alltså $f(x) = 3x/[x \cdot \sqrt{1+3/x} + x] = 3/[\sqrt{1+3/x} + 1]$, varför $f(x) \to 3/[\sqrt{1+0} + 1] = 3/2$ då $x \to +\infty$.

Svar: $f(x) = \sqrt{x^2+3x} - x \to 3/2$ då $x \to +\infty$.

Anmärkning: $f(x) \to +\infty$ då $x \to -\infty$.

Exempel: Bestäm gränsvärdet av $g(x) = \sqrt{x^2+3x} + x$ då $x \to -\infty$.

Lösning: $g(x) = [(\sqrt{x^2+3x})^2 - x^2]/[\sqrt{x^2+3x} - x] = 3x/[|x|\sqrt{1+3/x} - x]$. Men $|x| = -x$ för $x < 0$. Alltså $g(x) = 3/[-\sqrt{1+3/x} - 1] \to -3/2$ då $x \to -\infty$.

Svar: $g(x) = \sqrt{x^2+3x} + x \to -3/2$ då $x \to -\infty$.

Anmärkning: $g(x) \to +\infty$ då $x \to +\infty$.

Ö177. Bestäm gränsvärdet av a) $\sqrt{x^2+1} - x$ då $x \to +\infty$

b) $\sqrt{x^2-x} - x$ då $x \to +\infty$

c) $\sqrt{x^2+5x} - \sqrt{x^2+2}$ då $x \to +\infty$ d) $\sqrt{x^2+5x} - \sqrt{x^2+2}$ då $x \to -\infty$

e) $\sqrt{4x^2-3x+1} - 2\sqrt{x^2+1}$ då $x \to -\infty$ f) $x + \sqrt{x^2+6x+1}$ då $x \to -\infty$.

Exempel: Bestäm $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

Lösning: Sätt $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \dfrac{(\sqrt{x-1})^2-2^2}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \dfrac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}$.
Alltså $f(x) \to \dfrac{1}{\sqrt{4}+2} = \dfrac{1}{4}$ då $x \to 5$, dvs. $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 1/4$.

Svar: $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \dfrac{1}{4}$.

Ö178. Bestäm <u>a</u>) $\lim_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ <u>b</u>) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ <u>c</u>) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$

<u>d</u>) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x}-1}$.

D) **Gränsvärden av vissa logaritmfunktioner då $x \to \pm\infty$**

Exempel: Bestäm gränsvärdet av $f(x) = \ln(3x^2+1) - 2\ln(x-1)$ då $x \to +\infty$.

Lösning: Formellt går $f(x)$ mot "$\infty - \infty$", som är ett *obestämt uttryck*. Vi måste först med hjälp av logaritmlagarna skriva om uttrycket för $f(x)$, innan vi låter $x \to \infty$. Vi får $f(x) =$
$\ln(3x^2+1) - 2\ln(x-1) = \ln(3x^2+1) - \ln(x-1)^2 = \ln \dfrac{3x^2+1}{(x-1)^2} = \ln \dfrac{3x^2+1}{x^2-2x+1} =$
$= \ln \dfrac{x^2 \cdot (3+1/x^2)}{x^2 \cdot (1-2/x+1/x^2)} = \ln \dfrac{3+1/x^2}{1-2/x+1/x^2} \to \ln \dfrac{3+0}{1+0+0} = \ln 3$ då $x \to +\infty$.

Svar: $f(x) = \ln(3x^2+1) - 2\ln(x-1) \to \ln 3$ då $x \to +\infty$.

Anmärkning: $f(x)$ är <u>ej</u> definierad för $x \leq 1$. Däremot är $g(x) = \ln(3x^2+1) - \ln(x-1)^2$ definierad för alla $x \neq 1$ och $g(x) \to \ln 3$ då $x \to -\infty$.

Ö179. Bestäm gränsvärdet då $x \to +\infty$ av <u>a</u>) $\ln x - \ln(x+1)$

<u>b</u>) $2\ln x - \ln(x^2-1)$ <u>c</u>) $\ln(2x^3+1) - 3\ln x$ <u>d</u>) $\ln(x^2+x+1) - \ln x - \ln(2x+1)$

<u>e</u>) $\dfrac{3}{2}(x^2+4) - 2\ln(3x) - \ln\sqrt{x^2+1}$.

4.9 Något om asymptoter och kurvkonstruktioner. (Rationella funktioner).

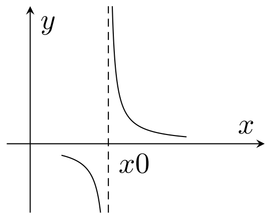
Definition: En *rät linje*, till vilken en rörlig punkt på en given kurva obegränsat närmar sig, då punkten allt mer avlägsnar sig från origo, kallas **asymptot** *till kurvan.*

Man kan dela in asymptoterna till $y = f(x)$ i tre olika typer:

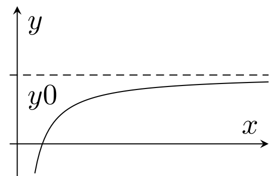
1° *lodräta* asymptoter, som fås då $|y| \to \infty$ men $x \to x_0$ (ändligt),

2° *vågräta* asymptoter, då $|x| \to \infty$ men $y \to y_0$ (ändligt),

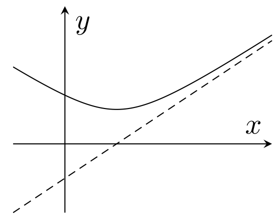
3° *sneda* asymptoter, då $|x| \to \infty$ och $|y| \to \infty$.



Lodrät asymptot:
$x = x_0$, då $x \to x_0$



Vågrät asymptot:
$y = y_0$, då $x \to +\infty$



Sned asymptot:
$y = kx + m$, då $x \to \infty$

Anmärkning: Man kan visa att räta linjen $y = kx + m$ är asymptot till kurvan $y = f(x)$ då $x \to \infty$, om och endast om de <u>båda</u> gränsvärdena $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ <u>och</u> $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - k \cdot x] = m$ existerar. [Analogt då $x \to -\infty$].

[Jämför även paragraf 3.5 angående hyperbelns asymptoter].

OBS: Naturligtvis finns det kurvor $y = f(x)$, som saknar asymptoter, t.ex. saknar kurvan $y = \sqrt{x}$ asymptot.

Exempel: Bestäm eventuella asymptoter, lokala maxima och minima samt rita kurvan $y = f(x)$, om $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x-1)(x+2)}$.

Lösning: för bestämning av *asymptoterna* undersökes de olika fall man får, då y och/eller x går mot $+\infty$ eller $-\infty$.

1° Vi har att $y = \dfrac{3x^2}{(x-1)(x+2)} \longrightarrow \begin{cases} +\infty, \text{ då } x \to 1 \quad \text{och} \quad x > 1 \\ -\infty, \text{ då } x \to 1 \quad \text{och} \quad x < 1 \end{cases}$

och att $y = \dfrac{3x^2}{(x-1)(x+2)} \longrightarrow \begin{cases} -\infty, \text{ då } x \to -2 \quad \text{och} \quad x > -2 \\ +\infty, \text{ då } x \to -2 \quad \text{och} \quad x < -2. \end{cases}$

Alltså är linjerna $x = 1$ och $x = -2$ två lodräta asymptoter.

2° Vidare gäller att $y = f(x) = \dfrac{3}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{2}{x}\right)} \to 3$ då $x \to \pm\infty$. Alltså är $y = 3$ en vågrät asymptot.

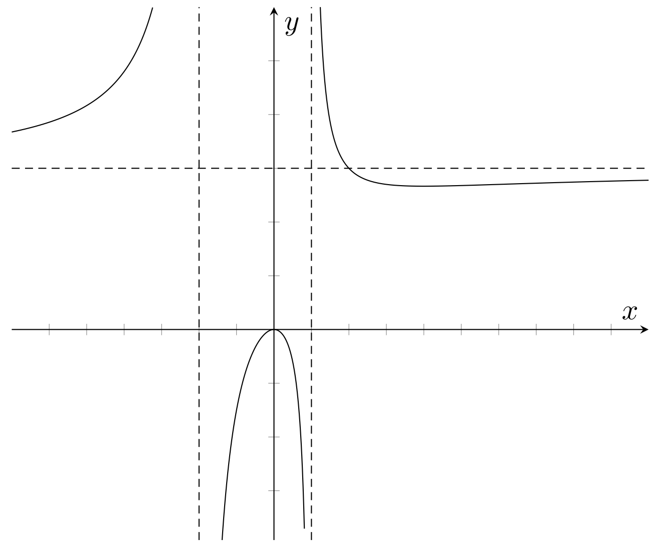
3° Sneda asymptoter saknas, (ty $\dfrac{f(x)}{x} \to 0 = k$, då $x \to \pm\infty$).
För bestämning av lokala *maxima och minima* bildas
$f'(x) = 3 \cdot \dfrac{2x(x^2+x-2) - x^2(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = 3 \cdot \dfrac{x^2 - 4x}{(x^2+x-2)^2}$. Alltså är $f'(x) = 0$ för $x_1 = 0$ och för $x_2 = 4$. Vi får följande tecken- och värdetabell:

x	$-\infty$	$<$	-2	$<$	0	$<$	1	$<$	4	$<$	∞
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\pm\infty$	$\searrow$	$8/3$	$\nearrow$	3
	(asym)		(asym)		(max)		(asym)		(min)		(asym)

Anmärkning: Med "värdet för $x = \infty$" menas naturligtvis gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Vi kan nu skissera kurvan

$$y = \frac{3x^2}{(x-1)(x+2)}.$$



OBS: *Nämnarens nollställen* i en (fullständigt förkortad) *rationell* funktion ger alltså de *lodräta* asymptoterna.

Exempel: Bestäm eventuella asymptoter, lokala maxima och minima samt rita kurvan $y = f(x)$, om $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

Lösning: Bestämning av *asymptoter:*

$$f(x) \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{då} \quad x \to -1 \quad \text{och} \quad x > -1 \\ -\infty & \text{då} \quad x \to -1 \quad \text{och} \quad x < -1. \end{cases}$$

Alltså är $x = -1$ en lodrät asymptot. Vidare är $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1} = [\text{Division}] = x - 1 + \dfrac{2}{x+1}$. Alltså är $y = x-1$ en sned asymptot till $y = f(x)$, ty $f(x) - (x-1) = \dfrac{2}{x+1} \to 0$ då $x \to \pm\infty$.

Bestämning av lokala *maxima* och *minima*:

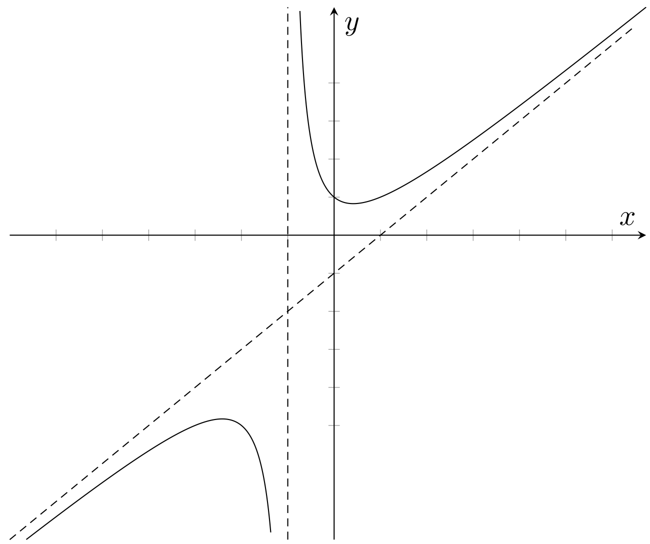
Bilda $f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - (x^2+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$. Vi får $f'(x) = 0$ för $x_1 = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4$ och $x_2 = -\sqrt{2} - 1 \approx -2{,}4$. Insättning ger $f(\sqrt{2}-1) = 2(\sqrt{2}-1) \approx 0{,}8$ och $f(-\sqrt{2}-1) = -2(\sqrt{2}+1) \approx -4{,}8$.

Tecken- och värdetabell:

x	$<$	$-\sqrt{2}-1$	$<$	-1	$<$	$\sqrt{2}-1$	$<$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-2\sqrt{2}-2$	$\searrow$	$\pm\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}-2$	$\nearrow$
		(max)		(asym)		(min)	

Vi kan nu skissera kurvan

$$y = f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}.$$



Ö180. Bestäm eventuella asymptoter, lokala maxima och minima samt rita kurvan $y = f(x)$, on $f(x)$ är

a) $\dfrac{1}{x-2}$ b) $\dfrac{x}{x+2}$ c) $\dfrac{1}{x^2-4}$ d) $\dfrac{x+1}{(x-2)(x+3)}$ e) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x-2}$ f) $\dfrac{2x^2-4}{x^2+1}$
g) $\dfrac{x^2-3}{x+2}$ h) $\dfrac{2x^2+x}{8-4x}$

Ö181. Antag, att $f(x) = \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0}{x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0}$ med $a_m \neq 0$, dvs. att $f(x)$ är en rationell funktion. Visa att kurvan $y = f(x)$

a) har en vågrät asymptot: $y = 0$, om $m < n$,

b) har en vågrät asymptot: $y = a_n$, om $m = n$,

c) har en sned asymptot: $y = a_{n+1}x + a_n - a_{n+1}b_{n-1}$, om $m = n + 1$,

d) saknar såväl vågrät som sned asymptot om $m > n+1$. (Kurvan kan ha lodrät asymptot).