Tentamen i Elementär talteori, MMG100 17 aug 2007 8.30 – 13.30
Examinator: Johan Berglind
Telefonvakt: Aron Lagerberg 076 – 272 18 61

Tillåtna hjälpmedel: typgodkänd räknedosa

Motivera lösningarna noggrant.

1. Bestäm alla heltal x sådana att $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{12} \\ x \equiv 8 \pmod{13} \end{cases}$ **(3p)**

2. Låt p vara ett udda primtal och q den minsta kvadratiska icke-resten modulo p.
Visa att q är ett primtal. **(4p)**

3. Låt p vara ett primtal och a ett positivt heltal.
Bilda $N = a^p + a \cdot (p-1)!$ Visa att N är delbart med p. **(3p)**

4. Finns det något heltal x sådant att $x^2 \equiv 14 \pmod{137}$? **(3p)**

5. Visa att det inte existerar några positiva heltal n sådana att $\Phi(n) = \dfrac{n}{6}$ **(4p)**

6. Låt p vara ett primtal sådant att $p \equiv 1 \pmod{4}$ och låt r vara en primitiv rot modulo p.
Visa att även $p - r$ är en primitiv rot modulo p. **(4p)**

7. Låt p vara ett primtal sådant att $p \equiv 1 \pmod{12}$.
Beräkna $\left(\dfrac{3}{p}\right)$ med hjälp av Gauss lemma. **(4p)**
Kvadratiska reciprocitetssatsen får alltså inte användas!