MMG100 – Elementär talteori
Sommaren 2009

Inlämningsuppgifter

- Inlämningsuppgifterna är frivilliga och genererar bonuspoäng till ordinarie samt två efterföljande tentamenstillfällen.
- Lösningarna skall vara fullständiga och prydligt redovisade, med andra ord ej handskrivna.
- Lösningarna skall lämnas in senast vid första föreläsningen efter sommaruppehållet, alltså 4 augusti 2009.
  Alternativt kan lösningarna skickas till
  Johan Berglind, Matematiska Vetenskaper, Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet, 412 96 Göteborg.
- Det är naturligtvis tillåtet, och i någon mån önskvärt, att arbeta gemensamt med uppgifterna. Dock skall lösningarna redovisas individuellt.
- Fem korrekta lösningar ger en bonuspoäng på tentamen.

Notera att svårighetsgraden varierar väsentligt mellan uppgifterna, samt att det i åtminstone ett fall kan krävas en del tunga beräkningar som inte bör göras för hand.

1. Låt $f(x)$ vara ett icke-konstant polynom med heltalskoefficienter.
Visa att det finns ett heltal y sådant att $f(y)$ är sammansatt.

Ledning: anta att $f(x) = p$ *är primtal och betrakta* $f(x+kp)$ *för olika heltal k.*

2. Beräkna Legendre-symbolen $\left(\frac{35}{79}\right)$.

3. För att slippa räkna hela sin samling tärningar brukar Lisa ordna dem i olika långa rader och se hur många som blir över för varje radlängd.
Vid ett tillfälle blev tre tärningar över när varje rad innehöll fem tärningar, tre blev över även när raderna bestod av sex tärningar, en blev över när raderna var sju tärningar långa och det gick jämnt ut när varje rad innehöll elva tärningar.
Hur många tärningar hade Lisa vid detta tillfälle?

4. Bestäm alla primtal p och q och positiva heltal m och n sådana att
$p^n - q^m = 1$

5. Bestäm alla positiva heltal m och n sådana att $m^n = n^m$.

6. Visa att $\pi(n) = \sum_{j=2}^{n} \left[\frac{(j-1)!+1}{j} - \left[\frac{(j-1)!}{j} \right] \right]$.

Här är $\pi(n)$ antalet primtal $\leq n$ och $[x]$ är heltalsdelen av x.

7. Doris och Filip kan inte komma överens och måste fatta ett beslut baserat på elektronisk slantsingling.
För detta ändamål väljer Doris i hemlighet de två primtalen 31 och 43 och skickar produkten 1333 till Filip. Efter en stunds grubblande svarar Filip med talet 669.
Vad gör Doris nu?
Ge exempel på hur Doris respektive Filip kan vinna slantsinglingen beroende på det okända val Filip har gjort och det Doris kommer att göra.

8. Låt n vara ett positivt heltal. Definiera funktionen S på så sätt att $S(n)$ är det minsta positiva heltal sådant att $S(n)!$ är delbart med n.
Beräkna $S(40)$.
Låt $a(n)$ vara den minsta inversen till S, alltså det minsta positiva heltalet för m sådant att $S(m) = n$.
Bestäm $a(12)$.

9. Följande är ett trevligt spel för två personer.
Man ställer en spelpjäs på en gitterpunkt i första kvadranten av ett vanligt tvådimensionellt koordinatsystem.
Spelarna turas om att flytta pjäsen.
Om den befinner sig i punkten (x, y) där $x \geq y$ kan den flyttas till någon av punkterna $(x - ty, y)$ där t är ett positivt heltal och $x - ty \geq 0$.
Om i stället $x \leq y$ är kan den flyttas till $(x, y - tx)$ med samma restriktioner.
Den spelare som flyttar pjäsen till någon av axlarna, dvs till $(0, y)$ eller $(x,0)$, vinner.

Visa att om pjäsens startposition är (a, b) kan den spelare som börjar partiet tvinga fram en vinst om $a = b$ eller om $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2} b$.