Tentamen i Elementär talteori, MMG100 fredag 21 augusti 2015

Kl 8.30 – 12.30

Examinator: Johan Berglind

Telefonvakt: Johan Berglind. Telefon 0705 – 234 324

Tillåtna hjälpmedel: typgodkänd räknedosa

För godkänt betyg krävs 12 poäng, för väl godkänt 18 poäng.

Motivera lösningarna noggrant.

1. Bestäm med hjälp av kinesiska restsatsen alla positiva heltal *x* som uppfyller kongruenserna $\begin{cases} 2x \equiv 1 & (mod\ 5) \\ 3x \equiv 3 & (mod\ 7) \\ x \equiv 4 & (mod\ 8) \end{cases}$ **(3p)**

2. Låt *p* vara ett primtal och anta att det finns heltal *a*, *b* och *c* sådana att $a^p + b^p = c^p$. Visa att $a + b - c$ är delbart med *p*. **(3p)**

3. Bestäm resten då 19! divideras med 23. **(3p)**

4. Bestäm alla udda primtal *p* sådana att kongruensen $x^2 + 2 \equiv 0 \ \ (mod\ p)$ är lösbar. **(4p)**

5. Bestäm alla positiva heltal *n* sådana att $\Phi(n) = n - 2$ **(3p)**

6. Bestäm alla udda primtal *p* med egenskapen att kongruensen $x^3 \equiv a \ \ (mod\ p)$ är lösbar för varje positivt heltal *a* mindre än *p*. **(4p)**

7. Låt *n* vara ett heltal >1. Antag att det finns ett *x* sådant att $x^{n-1} \equiv 1 \ \ (mod\ n)$, samtidigt som $x^{\frac{n-1}{q}} \not\equiv 1 \ \ (mod\ n)$ för alla primtal *q* som delar $n - 1$.

   Visa att *n* är ett primtal. **(5p)**