Tentamen i MMG100 Elementär talteori 2017-08-18 kl. 8.30–12.30

Examinator: Anders Martinsson
Telefonvakt: Tim Cardilin, telefon: 5325
Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 12 poäng, för väl godkänt 18 poäng.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret.

1. Visa att $123^{321} + 321^{123}$ är delbart med 7. (3p)

2. Finn det minsta positiva heltalet x sådant att

$$\begin{cases} x \equiv 2 \bmod 3 \\ x \equiv 4 \bmod 5 \\ x \equiv 5 \bmod 8. \end{cases}$$

(3p)

3. Finn alla inkongruenta lösningar till $x^6 \equiv 4 \bmod 17$.
(3 är en primitiv rot mod 17) (3p)

4. Visa att ekvationen $x^2 + 5xy + 5y^2 = 3$ saknar heltalslösningar. (3p)

5. Låt a och b vara positiva heltal sådana att $a^2 = b^3$. Visa att det existerar ett heltal c sådant att $c^2 = b$ och $c^3 = a$. Det är viktigt att du motiverar varje steg noga! (3p)

6. Låt p vara ett udda primtal ej lika med 5 sådant att $x^2 \equiv 5 \bmod p$ har lösningar. Visa att då har även $x^2 \equiv p \bmod 5$ lösningar. Dra slutsatsen att $p \equiv 1$ eller $4 \bmod 5$. (3p)

7. Det för närvarande största kända primtalet är $2^{74207281} - 1$. Vilken siffra slutar detta primtal med? (Notera att 2 och 10 inte är relativt prima.) (3p)

8. Låt a vara ett positivt heltal som inte är delbart med 2 eller 5. Visa a har en multipel som endast består av 9:or, dvs det finns ett heltal b sådant att ab är lika med någon av $9, 99, 999, \ldots$ (4p)

Lycka till!