Tentamen i Elementär talteori, MMG100 lördag 26 september 2015

Kl 8.30 – 12.30

Examinator: Johan Berglind

Telefonvakt: Linea Hietala. Telefon 0703 – 088 304

Tillåtna hjälpmedel: typgodkänd räknedosa

För godkänt betyg krävs 12 poäng, för väl godkänt 18 poäng.

Motivera lösningarna noggrant.

1. Visa att $5555^{2222} + 2222^{5555}$ är delbart med 7. **(3p)**

2. Visa att det finns oändligt många positiva heltal n
   sådana att $\varphi(n) = \frac{n}{3}$ **(3p)**

3. Låt *x,y,z* vara heltal sådana att $x^2 + y^2 = z^2$
   Visa att xyz är delbart med 30. **(3p)**

4. Bestäm alla positiva heltal *x* sådana att $x^7 \equiv 10 \pmod{19}$
   (2 är en primitiv rot modulo 19) **(4p)**

5. Låt *p* och *q* vara udda primtal sådana att $q = 4p + 1$.
   Visa att -2 är en primitiv rot modulo *q*. **(4p)**

6. Låt *p* vara ett udda primtal och *q* det minsta positiva heltal så att
   kongruensen $x^2 \equiv q \pmod{p}$ saknar lösning.
   Visa att *q* är ett primtal. **(4p)**

7. Bestäm alla heltal $n > 1$ sådana att $(n-1)!$ är
   delbart med $n + n^2$ **(4p)**