Tentamen i Elementär talteori, MMG100 onsdag 21 augusti 2013

Kl 8.30 – 12.30

Examinator: Johan Berglind

Telefonvakt: Dawan Mustafa tel 0703 – 088304

Tillåtna hjälpmedel: typgodkänd räknedosa

Motivera lösningarna noggrant.

1. Bestäm alla heltal *x* sådana att $\begin{cases} x \equiv 1 & (mod\ 4) \\ 2x \equiv 3 & (mod\ 5) \\ 4x \equiv 5 & (mod\ 7) \end{cases}$ **(3p)**

2. Låt *p* vara ett primtal > 11.
   Visa att $r = 9$ inte är en primitiv rot till *p*. **(3p)**

3. Bestäm alla heltal *x* och *y* sådana att $x^2 + 11xy + 1 = 0$ **(3p)**

4. Bestäm den minsta resten då $(33!)^2$ divideras med 67. **(4p)**

5. Låt *p* och *q* vara udda primtal med $q > p$.
   Antag att $q - 1$ är delbart med $p - 1$.
   Visa att $4^{q-1} - 1$ är delbart med pq **(3p)**

6. Låt *p* vara ett udda primtal och bilda talen $4, 8, 12, \ldots, 2p - 2$.
   Reducera alla dessa tal modulo *p* och betrakta de minsta positiva resterna. Låt *N* vara antalet av dessa rester som är $> \frac{p}{2}$.
   Visa att *N* är jämnt. **(4p)**

7. Antag att för något givet *k* ekvationen $\Phi(n) = k$ har en unik lösning *n*.
   Visa att *n* är delbart med 36.
   (*Här är Φ som vanligt Eulers funktion.)* **(5p)**