Tentamensskrivning i Matematik 1, MAM100, Matematisk baskurs
Datum: 2006-10-28
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Elin Götmark, 076-272 18 61

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

OBS: För alla uppgifter, utom nr 4 och 5, gäller att du skall skriva fullständiga lösningar, med klara och tydliga motiveringar av eventuella slutsatser.

1. a) Definiera begreppen *delare*, *trivial delare* och *primtal*.

   b) Låt p vara ett primtal. Visa att om p delar ab så gäller att p delar a eller att p delar b. Ge exempel som visar att påståendet inte gäller för godtyckliga positiva heltal p. (3p)

2. Låt M vara en mängd med operationerna addition och multiplikation definierade.

   a) Formulera ringaxiomen för M.

   b) Visa att $a \cdot 0 = 0$ för varje $a \in M$ om M är en ring. (3p)

3. a) Definiera begreppen *ekvivalensrelation* och *ekvivalensklass*.

   b) Låt relationen $\mathcal{R}$ vara definierad på $\mathbb{R}$ genom

   $$x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; x - y \text{ är ett heltal .}$$

   Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

   c) Ange precis en representant för varje ekvivalensklass. (4p)

4. Nedan ges sex utsagor. Avgör för var och en om den är sann eller falsk. Du behöver **inte** motivera dig. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar ger -0,5 poäng och inget svar ger 0 poäng. Du kan dock inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   a) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0 \Rightarrow x \geq 0.$

   b) $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^4 + x^2} = x\sqrt{x^2 + 1}.$

   c) $\forall x \in \mathbb{R} : \; x = \sqrt{x+2} \;\Rightarrow\; x = -1 \,\vee\, x = 2.$

   d) $\forall n \in \mathbb{Z} : 8|n \wedge 15|n \Rightarrow 120|n.$

   e) $\mathbb{Z}_4$ är en kropp.

   f) Om p och q är primtal sådana att $p|a$ och $q|a$ så gäller att $pq|a$. (3p)

5. a) Ge exempel på en funktion f med $D_f = \{-47, e, \pi, 10^9\}$ och $V_f = \{0, -\pi, 2006\}$.
   b) Ge exempel på en funktion g med $D_g = [-2, 2]$ och $V_g =]0, 1[$.
   c) Ge exempel på en funktion h med $D_h = \mathbb{R}$ och $V_h = \mathbb{Z}$.

   Rita figurer! (3p)

6. Tio personer deltar i tre olika tävlingsgrenar. På hur många sätt kan de tre förstaprisen komma att delas ut om den som har vunnit två förstapris inte får ställa upp i den tredje grenen? (3p)

7. Visa att

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

   för alla positiva heltal n. (3p)

8. Bestäm det största heltal som är en delare till varje tal av formen $4^{n+2} + 5^{2n+1}$, där $n = 0, 1, 2, \ldots$. (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger