Tentamensskrivning i Matematik 1, MAM100, Matematisk baskurs
Datum: 2007-01-13
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: 076-272 18 60, 076-272 18 61

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

1. a) Definiera begreppen *funktion, injektiv funktion* och *surjektiv funktion.*

   b) Ge exempel på en funktion som är

      i. injektiv men inte surjektiv
      ii. surjektiv men inte injektiv
      iii. både injektiv och surjektiv

   Glöm inte att ange relevanta mängder! (3p)

2. a) Definiera begreppen *ekvivalensrelation* och *ekvivalensklass.*

   b) Låt E vara en ekvivalensrelation på mängden A. Visa att ekvivalensklasserna till E bildar en partition av A.

   c) Ange en ekvivalensrelation på $\mathbb{Q}$ som svarar mot partitionen

$$\{\{0\}, \{q, 1/q\};\ q \neq 0,\ q \in \mathbb{Q}\}.$$ (4p)

3. a) Nedan ges kroppsaxiomen. Vilka av dessa utgör ringaxiomen?

   Addition:

      i. $\forall a, b \in M:\ \ a, b \in M \Rightarrow a + b \in M$ (slutenhet)
      ii. $\forall a, b, c \in M:\ \ (a + b) + c = a + (b + c)$ (associativitet)
      iii. $\forall a, b \in M:\ \ a + b = b + a$ (kommutativitet)
      iv. $\exists\, 0 \in M:\ \forall a \in M:\ \ 0 + a = a + 0 = a$ (neutralt element)
      v. $\forall a \in M:\ \exists -a \in M:\ a + (-a) = (-a) + a = 0$ (motsatt elem)

   Multiplikation:

      i. $\forall a, b \in M:\ \ a, b \in M \Rightarrow ab \in M$ (slutenhet)
      ii. $\forall a, b, c \in M:\ \ (ab)c = a(bc)$ (associativitet)
      iii. $\forall a, b \in M:\ \ ab = ba$ (kommutativitet)
      iv. $\exists\, 1 \in M:\ \forall a \in M:\ \ 1a = a1 = a$ (neutralt element)
      v. $\forall a \in M \setminus \{0\}:\ \exists\, a^{-1} \in M:\ \ aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (inverst element)

   Addition och multiplikation:

      i. $\forall a, b, c \in M:\ \ a(b + c) = ab + ac$ (distributivitet)

   b) Visa att i en godtycklig ring $\langle M, +, \cdot \rangle$ gäller att $(-1)(-1) = 1$. Använd bara ett ringaxiom i taget och ange vilket axiom som används i varje steg. (3p)

4. a) Formulera negationen av följande utsaga.

$$\forall \omega \;:\exists \delta > 0 \;: \forall x \in D_f \;:\; |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > \omega \qquad \text{(2p)}$$

b) Lös ekvationen $\sqrt{x^2+1} = x-2$. (1p)

5. På hur många sätt kan man bilda två ord (dvs bokstavspermutationer) med sammanlagt 10 bokstäver av bokstäverna i ordet PARALLELLA, med hänsyn tagen till ordningen mellan orden? Beräkna svaret explicit. (3p)

6. Bestäm resten då man dividerar $3^{2007} + 4^{2007}$ med 11. (3p)

7. Visa att för alla heltal $n \geq 2$ gäller

$$n \sum_{k=1}^{n-1} k! < 2 \sum_{k=1}^{n} k! \qquad \text{(3p)}$$

8. I figur (i) nedan ser vi de första sex raderna i Pascals triangel, med en hexagon centrerad i 4 inritad. Om vi betraktar de sex talen i hörnen till denna hexagon upptäcker vi att de två alternerande triplarna - nämligen 3,1,10 och 1,5,6 - uppfyller $3 \cdot 1 \cdot 10 = 30 = 1 \cdot 5 \cdot 6$. Figur (ii) innehåller rad 4 till 7 av Pascals triangel, med en hexagon centrerad i 10 inritad. I detta fall uppfyller de alternerande triplarna $4 \cdot 10 \cdot 15 = 600 = 6 \cdot 20 \cdot 5$.

a) Formulera en allmän hypotes utifrån dessa båda exempel.

b) Visa att hypotesen är riktig (3p)

Tentamensskrivning i Matematik 1, MAM100, Matematisk baskurs
Datum: 2007-01-13
MATEMATIK
Hjälpmedel: Inga
Göteborgs Universitet
Telefonvakt: 076-272 18 60, 076-272 18 61

Lycka till!
Ulla Dinger