Tentamensskrivning i Matematik 1, MAM100, Matematisk baskurs
Datum: 2007-08-21 kl 8.30-13.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Karin Kraft 076-272 18 61

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

1. Låt A och B vara två icke-tomma mängder.

   a) Definiera begreppet *relation* från A till B.

   b) Definiera begreppet *funktion* från A till B med hjälp av relationsbegreppet.

   c) Ge exempel på relationer som är respektive inte är funktioner.

   d) Antag att A och B är ändliga mängder med m respektive n element.

      i. Hur många funktioner från A till B finns det?

      ii. Hur många relationer från A till B finns det? (4p)

2. a) Definiera begreppen *delare*, *trivial delare* och *primtal*.

   b) Formulera aritmetikens fundamentalsats. Förklara skillnaden mellan existensen och entydigheten i satsen.

   c) Bevisa entydigheten (enbart denna) i aritmetikens fundamentalsats. (4p)

3. Nedan ges kroppsaxiomen för en kropp $\langle M, +, \cdot \rangle$.

   Addition:

   a) $\forall a, b \in M : \quad a, b \in M \Rightarrow a + b \in M$ (slutenhet)

   b) $\forall a, b, c \in M : \quad (a + b) + c = a + (b + c)$ (associativitet)

   c) $\forall a, b \in M : \quad a + b = b + a$ (kommutativitet)

   d) $\exists\, 0 \in M : \forall a \in M : \quad 0 + a = a + 0 = a$ (neutralt element)

   e) $\forall a \in M : \exists\, -a \in M : \ a + (-a) = (-a) + a = 0$ (motsatt elem)

   Multiplikation:

   a) $\forall a, b \in M : \quad a, b \in M \Rightarrow ab \in M$ (slutenhet)

   b) $\forall a, b, c \in M : \quad (ab)c = a(bc)$ (associativitet)

   c) $\forall a, b \in M : \quad ab = ba$ (kommutativitet)

   d) $\exists\, 1 \in M : \forall a \in M : \quad 1a = a1 = a$ (neutralt element)

   e) $\forall a \in M \setminus \{0\} : \exists\, a^{-1} \in M : \quad aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (inverst element)

   Addition och multiplikation:

   a) $\forall a, b, c \in M : \quad a(b + c) = ab + ac$ (distributivitet)

Visa att i en godtycklig kropp gäller

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ eller } b = 0.$$

Använd bara ett kroppsaxiom i taget och ange vilket axiom som används i varje steg. (3p)

4. Lös ekvationen $x\sqrt{x+2} = x\sqrt{x} - 4x$. (2p)

5. Idrottsklubben "Hej och hopp" får skicka 5 deltagare till juniormästerskapen i friidrott. I klubben har man många duktiga ungdomar och man väljer bland 4 höjdhoppare, 6 längdhoppare och 9 löpare. På hur många sätt kan man välja ut de 5 som ska få delta, om man bestämt sig för att välja åtminstone en deltagare ur varje kategori (de tre nämnda)? (3p)

6. Visa att
$$\sum_{k=n}^{2n} k^2 = \frac{14n^3 + 15n^2 + n}{6}$$
för $n = 1, 2, 3, \ldots$. (3p)

7. Bestäm sista siffran i talet 2007^{2007}. (3p)

8. Visa att
$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$
för $n = 0, 1, \ldots$ t.ex. med ett kombinatoriskt resonemang. (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger

Denna skrivning beräknas vara färdigrättad den 11 september. Ditt resultat meddelas via mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 8.30-13.00 på expeditionen.