Dimensionssatsen

Sats 1. *Antag att* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n$ *och* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_m$ *är baser för vektorrummet* $H \subset \mathbb{R}^d$. *Då gäller* $n = m$.

Bevis. På grund av symmetri räcker det att visa att $m \leq n$. Så antag att $m > n$. Vi skall visa att detta antagande leder till att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_m$ är linjärt beroende.

Låt $V = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_n)$ och $U = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \ldots\ \mathbf{u}_m)$. Eftersom $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n$ är en bas finns $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})^T$ med $\mathbf{u}_i = x_{i1}\mathbf{v}_1 + x_{i2}\mathbf{v}_2 + \ldots + x_{in}\mathbf{v}_n$ eller $\mathbf{u}_i = V\mathbf{x}_i$. Låt C vara $n \times m$ matrisen $C = (x_{ij}) = (\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \ldots\ \mathbf{x}_m)$.

Eftersom $m > n$ så har ekvationssystemet $CY = \mathbf{0}$ fler obekanta (m stycken) än ekvationer (n stycken) och alltså minst en fri variabel. Det finns alltså en icke-trivial lösning Y.

Nu gäller $VC = (V\mathbf{x}_1\ V\mathbf{x}_2\ \ldots\ V\mathbf{x}_m) = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \ldots\ \mathbf{u}_m) = U$ och alltså $UY = VCY = V\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Detta betyder att det finns $y_1, y_2, \ldots, y_m$, inte alla noll, så att $y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + \ldots + y_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}$. Så $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_m$ är linjärt beroende vilket är en motsägelse mot att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_m$ en bas. Alltså är antagandet att $m > n$ fel och alltså är $m \leq n$. ∎

På grund av satsen kan vi nu göra följande

Definition 2. *Dimensionen för ett vektorrum* H *är antalet element i en bas.*

Från beviset av dimensionssatsen får vi följande

Följdsats 3. *Om* $m > \dim(V)$ *så är* m *vektorer* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_m$ *i* V *alltid linjärt beroende.*