Karakterisering av inverterbara matriser

Här ger vi ett alternativt bevis för satsen om när en matris är inverterbar. A betecknar hela tiden en kvadratisk $n \times n$-matris.

Sats 1. (Sats 7, Kap. 2.2 i Lay) *Matrisen A är inverterbar om och endast om $A \sim I$.*

Lemma 2. *Om ekvationen $AX = Y$ har en entydig lösning för något Y så är $A \sim I$.*

Bevis. Låt $A \sim T$ där T är en reducerad trappstegsmatris. Eftersom ekvationen har entydig lösning här den ingen fri variabel och därför har T ett pivotelement i varje *kolonn*. Men T är kvadratisk och har därför ett pivotelement i varje *rad*. Därför gäller att $T = I$.

■

Lemma 3. *Om ekvationerna $AX = Y$ är lösbara för alla Y så är $A \sim I$.*

Bevis. Antag att $A \sim T$ där T är en reducerad trappstegsmatris. Eftersom ekvationerna $AX = Y$ är lösbara för alla Y så har T ett pivotelement i varje *rad*. Men T är kvadratisk och har därför ett pivotelement i varje *kolonn*. Därför gäller att $T = I$. ■

Lemma 4. *Inversen till en linjär avbildning är linjär.*

Bevis. Låt avbildningen vara Λ med inversen Λ^{-1}.

Vi skall visa att $\Lambda^{-1}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \Lambda^{-1}(\mathbf{y}_1) + \Lambda^{-1}(\mathbf{y}_2)$. Men eftersom Λ är linjär är $\Lambda(\Lambda^{-1}\mathbf{y}_1 + \Lambda^{-1}\mathbf{y}_2) = \Lambda\Lambda^{-1}\mathbf{y}_1 + \Lambda\Lambda^{-1}\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$. Detta betyder att $\Lambda^{-1}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \Lambda^{-1}\Lambda(\Lambda^{-1}\mathbf{y}_1 + \Lambda^{-1}\mathbf{y}_2) = \Lambda^{-1}\mathbf{y}_1 + \Lambda^{-1}\mathbf{y}_2$.

På liknade sätt ser man att $\Lambda^{-1}(t\mathbf{y}) = t\Lambda^{-1}\mathbf{y}$. ■

Lemma 5. *Om $A \sim I$ så är A inverterbar.*

Bevis. Om $A \sim I$ så har ekvationen $AX = Y$ en entydig lösning för varje Y. Så funktionen $X \mapsto AX$ är en bijektion på $\mathbb{R}^n$. Så den har en (funktions)invers A^{-1} som uppfyller att $A \circ A^{-1} = id$ och $A^{-1} \circ A = id$ där id är identiteten på $\mathbb{R}^n$, dvs. $id(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. På grund av Lemma 4 är A^{-1} en linjär funktion och ges alltså av en matris (som också får heta) A^{-1}. Denna matris uppfyller $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ och A^{-1} är alltså den sökta inversen. ■

Bevis av Sats 1. Om A är inverterbar gäller både att ekvationen $AX = Y$ är lösbara för alla Y och att lösningen är entydig. Så både Lemma 2 och Lemma 3 visar att $A \sim I$.

Den omvända implikationen är Lemma 5. ∎

Följdsats 6. *A har en vänsterinvers om och endast om A har en högerinvers.*

Bevis. Om A har en vänsterinvers så ger $AX = Y$ att $X = A^{-1}AX = A^{-1}Y$ så ekvationen har en entydig lösning. Lemma 2 ger att $A \sim I$ och enligt Sats 1 är A inverterbar (och A är också en högerinvers).

Om A har en högerinvers så gäller att $AA^{-1}Y = Y$ så ekvationen $AX = Y$ är lösbar (med lösningen $A^{-1}Y$). Lemma 3 ger att $A \sim I$ och enligt Sats 1 är A inverterbar (och A är också en vänsterinvers). ∎