Matematik
HC

Hjälpmedel: Inga, inte ens typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Jonatan Vasilis
076-272 18 61

MAM100, Linjär algebra

Tentamen den 12 april 2007, 8.30-13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger sammanlagt maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge 4 poäng.

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Ge inga motiveringar utan svara endast sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Vektorn $(3, 1, -2)$ är vinkelrät mot planet $3x + y - 2z = 7$.

   (b) Vektorerna $(1, 2, 2)$, $(3, 4, 4)$, $(2, 1, 0)$ och $(0, 3, 1)$ är en bas för $\mathbb{R}^3$.

   (c) För alla 2×2-matriser gäller $AB = BA$.

   (d) Om matrisen A uppfyller $A^7 = 0$ så gäller alltid att $\det A = 0$.

   (e) Det finns ett linjärt ekvationssystem som har exakt fyra olika lösningar.

   (f) Det finns en inverterbar matris sådan att $A^2 = 0$.

   (g) Antag att matrisen A är inverterbar och att B är en matris så att $AB = BA$. Då gäller alltid att $BA^{-1} = A^{-1}B$.

   (h) Om matrisen A är diagonaliserbar så är också A^T diagonaliserbar.

2. Bestäm arean av den triangel i $\mathbb{R}^3$ som har sina hörn i punkterna $(-2, -2, 4)$, $(-1, 4, 6)$ och $(1, 2, 3)$.

3. (a) Visa att vektorerna $\mathbf{e}_1 = (1, 3)$ och $\mathbf{e}_2 = (2, 3)$ är en bas för $\mathbb{R}^2$.

   (b) Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{v} = (0, 3)$ i denna bas.

Vänd!

4. Bestäm den räta linje som bäst ansluter till punkterna $(0,0)$, $(1,1)$ och $(2,1)$.

5. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & p \end{bmatrix}.$$

   (a) Det finns ett värde på p så att matrisen får rangen 3. Bestäm detta värde på p.

   (b) Bestäm för p-värdet i (a) en ortogonalbas för kolonnrummet till A.

6. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

   Bestäm alla vektorer $\mathbf{x}$ så att $A^n\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ då $n \to \infty$.

7. (a) Definiera vad som menas med att vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ och $\mathbf{v}_5$ är linjärt beroende.

   (b) Visa att fem vektorer i $\mathbb{R}^4$ alltid är linjärt beroende.

8. Låt A vara en 3×3-matris med kolonnvektorerna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_3$ och antag att A är Gaussekvivalent med matrisen $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Bevisa att $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$ är en bas för kolonnrummet till A.