MAM100, Linjär algebra

Kortfattade lösningar till tentamen den 12 april 2007

1. (a) Sant.
   Planet har normalvektorn $(3, 1, -2)$.

   (b) Falskt.
   Det är fyra vektorer men en bas för $\mathbb{R}^3$ består alltid av tre vektorer.

   (c) Falskt.
   Ett exempel är $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Då gäller $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ men $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (d) Sant.
   $(\det A)^7 = \det A^7 = \det 0 = 0$ så $\det A = 0$.

   (e) Falskt.
   Om det skall finnas mer än en lösning måste ekvationssystemet ha en fri variabel och därför finns det i så fall oändligt många lösningar.

   (f) Falskt.
   Som i d) ger villkoret att $\det A = 0$ och då är A inte inverterbar.

   (g) Sant.
   Villkoret ger $BA^{-1} = A^{-1}\,AB\,A^{-1} = A^{-1}\,BA\,A^{-1} = A^{-1}B$.

   (h) Sant.
   Om $A = PDP^{-1}$ så gäller $A^T = (PDP^{-1})^T = (P^{-1})^T D^T P^T = (P^T)^{-1} D P^T = QDQ^{-1}$ där Q är (den inverterbara) matrisen $(P^T)^{-1}$.

2. Låt $P = (-2, -2, 4)$, $Q = (-1, 4, 6)$, $R = (1, 2, 3)$, $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = (1, 6, 2)$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR} = (3, 4, -1)$. Arean av parallellogrammen som spänns av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ och triangelarean är hälften av detta. Nu gäller

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-14, 7, -14) = -7(2, -1, 2)\ .$$

Alltså är $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 7\sqrt{4+1+4} = 21$ och triangelaren är $\dfrac{21}{2}$.

3. Eftersom $\det(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ är $\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2$ en bas. Låt (x, y) vara koordinaterna för $\mathbf{v}$ i denna bas, $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$. Då gäller

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$$

med lösningen $x = 2, y = -1$. Så $\mathbf{v} = (2, -1)$ i basen $\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2$.

4. Idealt vill vi att den sökta linjen $y = ax + b$ skall upfylla

$$\begin{cases} b &= 0 \\ a + b &= 1 \\ 2a + b &= 1\ . \end{cases}$$

Minstakvadratlösningen till detta ekvationssystem ges av $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$

där $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Nu är $A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ och $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vi får $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{array}\right)$

som har lösningen $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{6}$. Den sökta linjen är alltså $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$.

5. (a) Gaussellimination ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & p \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p+4 \end{bmatrix}$$

Så A har rangen 3 precis då $p + 4 = 0$ dvs. då $p = -4$.

(b) När $p = -4$ är de tre första kolonnerna pivotkolonner så $\mathbf{f}_1 = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 1, 1, -1)$ och $\mathbf{f}_3 = (1, -1, 1, 1)$ är en bas för kolonnrummet. Vi skall nu ortogonalisera dessa för att få en ortogonalbas $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Vi observerar att $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ är ortogonala, $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = 0$. Så vi låter $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1$ och $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2$. Till sist sätter vi $\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_3 - a\mathbf{e}_1 - b\mathbf{e}_2$ där a och b välj så att $\mathbf{e}_3$ blir ortogonal mot $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$. Detta är uppfyllt om

$$0 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{e}_1 - a\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 2 - 2a$$

respektive

$$0 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{e}_2 - b\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 - 4b\ .$$

Så $a = 1$, $b = 0$ och $\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_3 - \mathbf{e}_1 = (0, -1, 1, 0)$.

Alltså är $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1, 1, -1)$ och $\mathbf{e}_3 = (0, -1, 1, 0)$ en bas för kolonnrummet.

6. Vi bestämmer först egenvärdena till A.

$$\det A - \lambda I = \begin{vmatrix} 3/4-\lambda & 0 & -1/4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1/4 & 0 & 3/4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3/4-\lambda & -1/4 \\ -1/4 & 3/4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1/2-\lambda & 1/2-\lambda \\ -1/4 & 3/4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(\frac{1}{2}-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1/4 & 3/4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda-1)(\lambda-2)\ .$$

Så egenvärdena är $\frac{1}{2}$, 1 och 2. Låt motsvarande egenvektorer vara $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$ respektive $\mathbf{v}_2$. Dessa är en bas för $\mathbb{R}^3$ så varje vektor $\mathbf{x}$ kan skrivas $\mathbf{x} = a\mathbf{v} + a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ vilket ger $A^n\mathbf{x} = aA^n\mathbf{v} + a_1A^n\mathbf{v}_1 + a_2A^n\mathbf{v}_2$ $= a\dfrac{1}{2^n}\mathbf{v} + a_1\mathbf{v}_1 + a_2 2^n\mathbf{v}_2$.

Så $A^n\mathbf{x} \to 0$ precis då $a_1 = a_2 = 0$, dvs. för alla $\mathbf{x}$ av formen $\mathbf{x} = a\mathbf{v}$, $a \in \mathbb{R}$.

Till sist bestämmer vi egenvektorn $\mathbf{v}$ till egenvärdet $\frac{1}{2}$. Vi har

$$A - \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Så $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ är en egenvektor. Svar: Alla $\mathbf{x} = (a, 0, a)$, $a \in \mathbb{R}^n$.

7. (a) Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ och $\mathbf{v}_5$ är linjärt beroende om ekvationssytemet

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 + x_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$$

har en icke-trivial lösning, dvs. en lösning där inte alla $x_i = 0$.

(b) Ekvationssystemet $x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+x_3\mathbf{v}_3+x_4\mathbf{v}_4+x_5\mathbf{v}_5=\mathbf{0}$ består av fyra ekvationer (ty $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^4$) och har alltså högst fyra pivotelement. Ekvationssystemet har fem obekanta och alltså minst en fri variabel. Därför har ekvationssystemet oändligt många lösningar och speciellt en icke-trivial lösning.

8. Låt $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ och $\mathbf{b}_3$ vara kolonnvektorerna i B. Vi ser att $\mathbf{b}_3 = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$. Eftersom A och B är Gaussekvivalenta gäller $\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & | & \mathbf{a}_3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & | & \mathbf{b}_3\end{pmatrix}$. Så ekvationssystemet $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3$ har lösningen $x_1 = -2, x_2 = 1$, dvs. $\mathbf{a}_3 = -2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ så $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ spänner kolonnrummet.

Det är klart att $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ är linjärt oberoende så ekvationssystemet $x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$ har bara den triviala lösningen $x_1 = -x_2 = 0$. Men $\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & | & \mathbf{0}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & | & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ så ekvationssystemet $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ har också bara den triviala lösningen. Så $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ är linjärt oberoende.