Hjälpmedel: Inga, inte ens typgodkänd räknedosa

Matematik
HC

Telefonvakt: Marcus Warfheimer
076-272 18 61

MAM100, Linjär algebra

Tentamen den 23 augusti 2007, 8.30-13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger sammanlagt maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge 4 poäng.

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Ge inga motiveringar utan svara endast sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Vektorerna $(1,0,1,0)$, $(1,1,0,1)$ och $(1,1,1,0)$ är en bas för $\mathbb{R}^4$.

   (b) Vektorn $\mathbf{v} = (1,1)$ är en egenvektor till matrisen
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

   (c) Ett linjärt ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer har alltid en lösning.

   (d) Om två nollskilda vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala så är de linjärt oberoende.

   (e) Om man genomför elementära radoperationer på en matris så kan dess bildrum ändras.

   (f) Bildrummet till matrisen A^2 är alltid ett delrum till bildrummet till matrisen A. (A är en kvadratisk matris.)

   (g) Varje egenvektor till matrisen A är också en egenvektor till A^2.

   (h) Om A^2 är en inverterbar matris så är A^3 det också.

Vänd!

2. Beräkna arean av den triangel som har hörn i punkterna $(3, 2, -1)$, $(1, 2, 2)$ och $(-1, -1, 1)$.

3. Bestäm en bas för nollrummet och kolonnrummet till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & -9 & 6 & 12 & -3 \\ -2 & 6 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} .$$

4. Bestäm matrisen för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ som avbildar vektorn $(2, 1)$ på $(2, 5, -1)$ och vektorn $(1, -1)$ på $(1, 1, -2)$.

5. Bestäm den räta linje som bäst ansluter till punkterna $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ och $(2, 3)$.

6. (a) Bestäm en bas av ortogonala egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

   (b) Låt $\mathbf{u} = (4, 4, -2)$ och bestäm vektorn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n \mathbf{u}}{5^n} .$$

7. Låt W vara ett delrum till $\mathbb{R}^n$. Visa att varje vektor $\mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^n$ entydigt kan skrivas

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$$

   där $\hat{\mathbf{y}}$ ligger i W och $\mathbf{z}$ i $W^\perp$.
   ($W^\perp$ är det ortogonala komplementet till W.)

8. (a) Definiera den transponerade matrisen A^T till en matris A.

   (b) Låt A vara en skevsymmetrisk matris, dvs. en kvadratisk matris med $A^T = -A$. Visa att då är $I - A$ en inverterbar matris.
   Ledning. Visa att om $(I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ så är $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.