MAM100, Linjär algebra

Kortfattade lösningar till tentamen den 23 aug. 2007

1. (a) Falskt.
   $\mathbb{R}^4$ är fyrdimensionellt och en bas består alltid av *fyra* vektorer.

   (b) Sant.
   $A\mathbf{v} = (3,3) = 3\mathbf{v}$.

   (c) Falskt.
   Ett exempel utan lösning är $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$.

   (d) Sant.
   Om $a\mathbf{u}+b\mathbf{v}=\mathbf{0}$ ger skalärmultiplikation med $\mathbf{u}$ att $a|\mathbf{u}|^2=0$ så $a=0$ och på samma sätt får vi $b=0$.

   (e) Sant.
   Om $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ så gäller $A \sim B$ men A och B har *inte* samma bildrum. T.ex. ligger $(1,1)$ i bildrummet till A medan alla vektorer i bildrummet till B har andrakoordinaten 0.

   (f) Sant.
   Om $\mathbf{b}$ ligger i bildrummet till A^2 så finns $\mathbf{x}$ med $\mathbf{b}=A^2\mathbf{x}=A(A\mathbf{x})$ och alltså ligger $\mathbf{b}$ i bildrummet till A ($\mathbf{b}$ är bilden av $A\mathbf{x}$).

   (g) Sant.
   Om $A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$ så gäller $A^2\mathbf{v}=A(A\mathbf{v})=A(\lambda\mathbf{v})=\lambda A\mathbf{v}=\lambda^2\mathbf{v}$ så $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A^2 med egenvärdet λ^2.

   (h) Sant.
   Om A^2 är inverterbar gäller $\det A^2 \neq 0$. Men $\det A^2 = (\det A)^2$ så $\det A \neq 0$. Därför gäller $\det A^3 = (\det A)^3 \neq 0$ och alltså är A^3 inverterbar.

2. Låt $P_1=(3,2,-1)$, $P_2=(1,2,3)$ och $P_3=(-1,-1,1)$. Då gäller $\mathbf{u}=\overrightarrow{P_1P_2}=(-2,0,3)$ och $\mathbf{v}=\overrightarrow{P_1P_3}=(-4,-3,2)$. Längden av vektorn

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är arean av parallellogrammen som spänns av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Så den sökta arean är $\frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. Nu gäller $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -2 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (9, -8, 6)$

och vi får $\frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \frac{1}{2}|\sqrt{81 + 64 + 36} = \frac{1}{2}\sqrt{181}$.

3. Gaussellimination ger

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & -9 & 6 & 12 & -3 \\ -2 & 6 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Så den första och tredje kolonnen är pivotkolonner och alltså är $(1, 3, -2)$ och $(2, 6, 5)$ en bas för kolonnrummet.

Vi ser också att $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_4$ och $\mathbf{x}_5$ är fria och att lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är

$$\begin{cases} x_1 = 3s - 2t + 3u \\ x_2 = s \\ x_3 = -t - u \\ x_4 = t \\ x_5 = u \end{cases} \qquad \text{eller } \mathbf{x} = s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Så $(3, 1, 0, 0, 0)$, $(2, 0, 1, -1, 0)$ och $(3, 0, -1, 0, 1)$ är en bas för nollrummet.

4. Matrisen för T ges av $(T\mathbf{e}_1 \; T\mathbf{e}_2)$ där $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ och $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$. Eftersom $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}((2, 1) + (1, -1))$ har vi $T\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}(T(2, 1) + T(1, -1)) = \frac{1}{3}((2, 5, -1) + (1, 1, -2)) = (1, 2, -1)$. Vi har också $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{3}((2, 1) - 2(1, -1))$ och $T\mathbf{e}_2 = \frac{1}{3}(T(2, 1) - 2T(1, -1)) = \frac{1}{3}((2, 5, -1) - 2(1, 1, -2)) = (0, 1, 1)$. T ges alltså av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Idealt vill vi att den sökta linjen $y = ax + b$ skall uppfylla

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ b = 1 \\ a + b = 1 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$$

Minstakvadratlösningen till detta system ges av $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ där

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Nu är } A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ och}$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}. \text{ Vi får systemet } \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 7 \\ -10 & 0 & -9 \end{array}\right) \text{ med}$$

lösningen $a = 9/10$ och $b = 8/10$. Så den sökta linjen är $y = \frac{1}{10}(9x+8)$.

6. (a)

Egenvärden:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{c} \text{addera de två första} \\ \text{raderna till den sista} \end{array} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ -\lambda-1 & -\lambda-1 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = -(\lambda+1)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c} \text{subtrahera den första ko-} \\ \text{lonnen från de två andra} \end{array} \right) = -(\lambda+1)\begin{vmatrix} -\lambda & 1+\lambda & \lambda-2 \\ 1 & -1-\lambda & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+1)\begin{vmatrix} 1+\lambda & \lambda-2 \\ -(1+\lambda) & -3 \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2\begin{vmatrix} 1 & \lambda-2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

så $\lambda = -1$ (dubbellt) eller $\lambda = 5$.

Egenvektorer:

$\lambda = -1$.

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ så } (A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ har}$$

lösningen

$$\begin{cases} x = 2t - s \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \text{eller } \mathbf{u} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Så till egenvärdet $\lambda = 1$ har vi egenvektorerna $\mathbf{e}_1 = (-1, 1, 0)$ och $\tilde{\mathbf{e}}_2 = (2, 0, 1)$.

De är inte ortogonala. Sätt $\mathbf{e}_2 = \tilde{\mathbf{e}}_2 - \alpha\mathbf{e}_1$. Då är $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ ortogonala när $0 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2 - \alpha\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = -2 - 2\alpha$ dvs. när $\alpha = -1$. Då blir $\mathbf{e}_2 = (1, 1, 1)$.

$\lambda = 5$.

Gaussellimination ger (räkna själv)

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \ldots\ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så en egenvektor är $\mathbf{e}_3 = (1, 1, -2)$.

Matrisen A är symmetrisk så egenvektorer till olika egenvärden är ortogonala (det kan man förståss också kollla direkt) så $\mathbf{e}_1 = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1, 1)$ och $\mathbf{e}_3 = (1, 1, -2)$ är en ortogonalbas av egenvektorer.

(b)

Eftersom $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ är en bas kan $\mathbf{u}$ skrivas $\mathbf{u} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$. Vi får

$\dfrac{A^n\mathbf{u}}{5^n} = \dfrac{1}{5^n}(aA^n\mathbf{e}_1 + bA^n\mathbf{e}_2 + cA^n\mathbf{e}_3) = (-\dfrac{1}{5})^n a\mathbf{e}_1 + (-\dfrac{1}{5})^n b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 \longrightarrow$

$c\mathbf{e}_3$, $n \to \infty$.

För att bestämma c använder vi ortogonaliteten som ger $\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_3 = c\ \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3$, dvs. $12 = 6c$ och $c = 2$. Alltså blir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n\mathbf{u}}{5^n} = (2, 2, -4)\ .$$

7. Se läroboken, Th. 8, Kap. 6.3, sid. 395.

8. (a) Om $A = (a_{ij})$ så är den transponerade matrisen $A^T = (a_{ji})$.

   (b) Vi använder att den transponerade matrisen uppfyller $A\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{u}$. Om $(I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ eller $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$ så får vi $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = A\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{u} =$ skevsymmetrin $= \mathbf{u} \cdot -\mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$. Detta ger $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ och $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Alltså har ekvationen $(I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ endast den triviala lösningen och alltså är $A - I$ inverterbar (villkor d. i karakteriseringen av inverterbara matriser, Th. 8, Kap. 2.3, sid. 129).